

Приклад 1. Дослідити на сумісність систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 = -2. \end{cases}$$

Запишімо матрицю системи A і розширену матрицю системи \bar{A} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Приведемо матрицю к східчастому вигляду, щоб визначити ранг матриці

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{array} \right). \quad \text{rang} A = 1, \quad \text{rang} \bar{A} = 2.$$

Отримали $\text{rang} A \neq \text{rang} \bar{A}$, за теоремою Кронекера-Капеллі система несумісна (не має розв'язків).

Приклад 2. Дослідити на сумісність систему рівнянь і випадку її сумісності – розв'язати її.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язок:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} S_1 \\ S_1 \cdot (-3) + S_2 \\ S_1 \cdot (-2) + S_3 \\ S_1 \cdot (-3) + S_4 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 : (-4) \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -3 & 8 \\ 0 & -7 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_2 \cdot (7) + S_3 \\ S_2 \cdot (7) + S_4 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{S_3 : (-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_3 + S_4 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = 3 = n$, тому за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна.
 Ранг системи дорівнює числу невідомих, тому система має єдиний розв'язок.
 Знайдемо його

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - x_3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -5. \end{cases}$$

Перевірка: $x_1 = 4; x_2 = 1; x_3 = -5$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases} \begin{cases} 3 \cdot 4 - 1 + 2 \cdot (-5) = 1 \\ 4 + 2 \cdot 1 + (-5) = 1 \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - (-5) = 10 \\ 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 - 1 - 10 = 1, \\ 4 + 2 - 5 = 1, \\ 8 - 3 + 5 = 10, \\ 12 + 2 - 15 = -1. \end{cases} = \begin{cases} 1 = 1, \\ 1 = 1, \\ 10 = 10, \\ -1 = -1. \end{cases}$$

Відповідь: (4;1;-5).

Системи n лінійних рівнянь з n невідомими.

Розв'язок не вироджених систем методом Крамера и матричним методом.

Якщо задана система n лінійних рівнянь з n невідомими, то для неї можна застосувати теорему Крамера.

Теорема Крамера. Нехай Δ - визначник матриці системи A , а Δ_j - визначник матриці, отриманої з матриці A заміною j -го стовпця стовпцем вільних членів. Тоді, якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, що визначається за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Ці формули отримали назву *формул Крамера*.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$

$$\text{Розв'язок: } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14.$$

За формулами Крамера отримуємо: $x_1 = \frac{7}{7} = 1$, $x_2 = \frac{14}{7} = 2$.

Перевірка: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 - 2 = 0, \\ 1 + 3 \cdot 2 = 7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0, \\ 7 = 7. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Розв'язок: Знайдемо визначник системи $\Delta = |A|$.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 = \\ &= 2 - 1 + 2 - 1 - 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

Визначник Δ було обчислено методом трикутника. Раніше вже відмічалось, що визначник 3-го порядку можна обчислювати будь-яким з 4 методів.

В зв'язку з тим, що $\Delta = 5 \neq 0$, за теоремою Крамера система має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники матриць $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, отриманих з матриці A , заміною відповідно першого, другого і третього стовпців стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Примітка. Визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ обчислимо одним з 4 методів для визначників третього порядку (див. лекцію 2).

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$$

тобто розв'язок системи $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Відповідь: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$

Матричний метод розв'язання системи.

Нехай дана система n лінійних рівнянь з n невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

або у вигляді матричного рівняння $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Основна матриця A такої системи квадратна. Визначник цієї матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ називається визначником системи.}$$

Якщо визначник системи відрізняється від нуля, система називається не виродженою.

Знайдемо розв'язок даної системи $\Delta \neq 0$.

Множачи зліва обидві частини матричного рівняння $A \cdot X = B$ на матрицю A^{-1} , отримуємо $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$.

Оскільки $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то розв'язком системи матричним методом буде матриця-стовпець

$$X = A^{-1}B.$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок:

Маємо:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |A| = -8.$$

Обчислимо обернену матрицю за алгоритмом (див. лекцію 3). В результаті отримуємо:

$$A^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

(див. алгоритм знаходження оберненої матриці).

Знаходимо матрицю X , виходячи з того, що $X = A^{-1}B$:

$$X = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 \cdot 3 + 3(-1) - 7 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 1(-1) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 - 2(-1) - 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

тобто $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ - розв'язок даної системи.

Перевірка: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + (-1) = 3, \\ 2 - 5 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = -1, \\ 2 - 0 + (-1) = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3, \\ -1 = -1, \\ 1 = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$

Метод Гауса

Одним з найбільш універсальних і ефективних методів вирішень лінійних систем рівнянь є метод Гауса.

Метод Гауса - метод послідовного виключення змінних - полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система рівнянь приводиться до рівносильної системи ступінчастого (або трикутного) вигляду, з якого послідовно, починаючи з останніх (за номером) змінних, знаходяться усі останні змінні.

Приклад. Розв'язати методом Гауса систему неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язування прикладу

1. Зведемо розширену матрицю системи до східчастого вигляду.

Поміняємо місцями перше і третє рівняння системи для того, щоб коефіцієнт a_{11} дорівнював одиниці. Далі проведемо елементарні перетворення матриці (прямий хід методу Гауса).

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{S_1 \cdot (-3) + S_2 \\ S_1 \cdot (-2) + S_3}} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{S_3 \cdot (-3) + S_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{S_2 \cdot 3 + S_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{array} \right). \end{aligned}$$

2. Знайдемо $\text{rang} A$ і $\text{rang} \bar{A}$.

Бачимо, що і матриця A , і розширена матриця \bar{A} мають три ненульових рядки. Отже, $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = r = 3$, з чого за теоремою Кронекера-Капеллі

впливає, що система сумісна. Оскільки $r = n = 3$, то система рівнянь **визначена, тобто має єдиний розв'язок**. Знайдемо його.

3. Запишімо еквівалентну заданій східчасту систему рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ -x_2 + 2x_3 = -5, \\ 5x_3 = -15. \end{cases}$$

4. Виконаємо зворотний хід методу Гауса.

Знаходимо невідомі, розв'язуючи систему рівнянь знизу ввверх.

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2 - x_3 = 1 - 2 + 3 = 2, \\ x_2 = 5 + 2x_3 = 5 - 6 = -1, \\ x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Таким чином отримали єдиний розв'язок системи рівнянь.

Перевірка: $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -3$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 - (-1) + (-3) = 2, \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) = -2, \\ 2 - 2 \cdot (-1) + (-3) = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 1 - 3 = 2 \\ 6 - 2 - 6 = -2 \\ 2 + 2 - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ -2 = -2 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -3$.

Приклад. Розв'язати методом Гауса систему неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

Розв'язування прикладу

1. Зведемо розширену матрицю системи до східчастого вигляду.

Проведемо елементарні перетворення розширеної матриці \overline{A} .

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} S_1(-2)+S_2 \\ -S_1+S_3 \\ -S_1+S_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} S_2+S_3 \\ \\ -S_2+S_4 \end{array} \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +6 \end{array} \right) \begin{array}{l} S_3+S_4 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

2. Знайдемо $\text{rang} A$ і $\text{rang} \bar{A}$. Зробимо висновки про розв'язки заданої системи рівнянь.

Бачимо, що $\text{rang} A = 2$ (матриця A має два ненульових рядка), а $\text{rang} \bar{A} = 3$.

З цього випливає, що дана **система розв'язків не має**.

Відповідь: система розв'язків не має.