Інтегрування раціональних функцій

Клас раціональних функцій поділяється на цілі раціональні функції або многочлени та дробово-раціональні функції, які є відношенням двох многочленів. Найпростішою цілою раціональною функцією є **многочлен n-го порядку**, тобто функція вигляду:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n,$$

де - $a_i \quad (i = 0,1,...,n)$ - дійсні числа. Тоді невизначений інтеграл від $P(x)$ існує і він є цілою раціональною функцією. Справді,

$$\int P(x)dx = \int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n)dx =$$

$$= a_0\int x^n dx + a_1\int x^{n-1}dx + a_2\int x^{n-2}dx + ... + a_n\int dx =$$

$$= a_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1\frac{x^n}{n} + a_2\frac{x^{n-1}}{n-1} + ... + a_nx + c$$

У результаті інтегрування многочлена n-го степеня дістали многочлен $(n+1)$ -го степеня.

Приклад 1:

$$\int (3x^4 + 5x^3 + 9x + 7)dx = 3\int x^4dx + 5\int x^3dx + 9\int xdx + 7 =$$

$$= \frac{3x^5}{5} + \frac{5x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} + 7x + C$$

Розглянемо тепер дробово-раціональну функцію

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x)$ - многочлен степеня n, а $Q_m(x)$ - многочлен степеня m, який має вигляд

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + ... + b_m,$$

де $b_i \ (i = 0,1,...,m)$ - дійсні числа.

Означення. Алгебраїчний дріб називається ***правильним***, якщо степінь чисельника менший, ніж степінь знаменника $n < m$. Коли ж $n \geq m$, то алгебраїчний дріб називається ***неправильним***.

$\frac{7 - 8x + x^3}{2x^5 - 3x^3 + 1}$ - правильний дріб, $\frac{2x^2 + 5x + 1}{x + 5}$ - неправильний дріб.

Якщо алгебраїчний дріб неправильний, то за допомогою ділення многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ з нього можна виділити цілу частину, а саме многочлен

$$G(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \ldots + c_k .$$

Тоді можна записати

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де $R(x)$ - степінь якого менше, ніж степінь многочлена $Q_m(x)$, тобто $\frac{R(x)}{Q(x)}$ правильний алгебраїчний дріб.

Приклад 2. Виділити з неправильного дробу цілу частину.

$\int \frac{2x^2+5x+1}{x+5}dx = \int\left(2x-5+\frac{26}{x+5}\right)dx = 2\int xdx - 5\int dx + 26\int \frac{1}{x+5}dx =$ $= 2\cdot\frac{x^2}{2} - 5x + 26\ln\lvert x+5\rvert + C = x^2 - 5x + 26\ln\lvert x+5\rvert + C$	$\begin{array}{r l} 2x^2+5x+1 & \lvert\, x+5 \\ -\;\underline{2x^2+10x} & 2x-5 \\ -5x+1 & \\ -\;\underline{-5x-25} & \\ 26 & \end{array}$

Отже, невизначений інтеграл від неправильного дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ дорівнює:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left(G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\right)dx = \int G(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx .$$

Ця рівність показує, що інтегрування неправильного алгебраїчного дробу зводиться до інтегрування многочлена та правильного дробу. Інтеграл від многочлена знаходиться безпосередньо. Інтеграл від правильного дробу зводиться до інтегралів від елементарних дробів.

Найпростіші раціональні дроби та їх інтегрування.

Означення. Простими, або елементарними, дробами називаються такі дроби:

$$1)\frac{A}{x-a}, \qquad 2)\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad 3)\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

де A, B, a, p, q - дійсні числа, $n \ge 2$ - ціле додатне число, причому: $\frac{p^2}{4} - q < 0$, тобто квадратний тричлен x^2+px+q має комплексні корені.

Інтегрування найпростіших дробів

І-й тип:	$\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln\lvert x-a\rvert + C;$
ІІ-й тип:	$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\cdot\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C;$
ІІІ-й тип: $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$	

Виведення формул:

1. $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{dx}{x-a} = \left| \begin{array}{c} t = x-a \\ dt = \left(x-a\right)' dx \\ dt = dx \end{array} \right| = A\int\frac{dt}{t} = A\ln|t| + C = A\ln|x-a| + C$$

2. $$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int\frac{dx}{(x-a)^n} = \left| \begin{array}{c} t = x-a \\ dt = dx \end{array} \right| = = A\int\frac{dt}{t^n} = A\int t^{-n}dt =$$
$$= A\frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)t^{n-1}} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $I = \int\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Розв’язування прикладу

1. Попередні міркування.

Маємо **найпростіший дріб ІІІ-го типу** при $A = 0$.

2. Виділіть у знаменнику дробу повний квадрат.

Запишімо знаменник підінтегрального виразу у вигляді $x^2+4x+8 = x^2+4x+4-4+8 = (x+2)^2-4+8 = (x+2)^2+4$.

$$I = \int\frac{dx}{x^2+4x+8} = \int\frac{dx}{(x+2)^2+4}$$

3. Введіть нову змінну.

Покладемо $t = x+2$, звідки $dt = dx$.

4. Запишіть інтеграл відносно нової змінної.

Маємо $I = \int\frac{dt}{t^2+4}$.

5. Обчисліть отриманий інтеграл.

За табличною формулою $I = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C$.

6. Запишіть відповідь.

Повертаючись до змінної x, остаточно отримаємо $I = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$

Оформлення розв'язання прикладу

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \left| x^2+4x+8 = (x+2)^2+4 \right| = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \left| \begin{array}{l} t = x+2 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $I = \int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx$.

Розв'язування прикладу

1. Маємо інтеграл від **найпростішого дробу ІІІ-го типу**.

2. Виділемо у знаменнику дробу повний квадрат.

Важливо! Якщо в знаменнику дробу ІІІ-го типу замість квадратного тричлена $x^2 \pm px + q$ знаходиться тричлен $ax^2 \pm bx + c\ (a \neq 0)$, то коефіцієнт a слід винести за дужки і тим самим звести цей випадок до попереднього.

Виконаємо перетворення у знаменнику дробу.

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right) = 2\left(\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 2\left(\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2} \right) = 2\left(\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right)$$

3. Введемо нову змінну.

Нехай $x - \frac{3}{4} = t$. Звідси $x = t + \frac{3}{4}, dx = dt$.

4. Запишімо інтеграл відносно нової змінної.

Після заміни змінної інтеграл має вигляд

$$I = \int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx = \int \frac{7-8x}{2\left(\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right)}dx = \int \frac{7 - 8\left(t + \frac{3}{4} \right)}{2\left(t^2 - \frac{1}{16} \right)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{-8t+1}{t^2 - \frac{1}{16}}dt.$$

5. Подаємо інтеграл I у вигляді суми двох доданків.

Розкладемо отриманий інтеграл на два інтеграли, відповідно двом доданкам у чисельнику.

$$I = -\int \frac{4t}{t^2 - \frac{1}{16}}dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{16}} = I_1 + I_2 .$$

6. Обчислимо перший інтеграл I_1.

Для обчислення I_1 застосуємо метод введення під знак диференціала.

Оскільки $4tdt = 2 \cdot 2tdt = 2d\left(t^2 - \frac{1}{16}\right)$, то $I_1 = -2\int \frac{d\left(t^2 - \frac{1}{16}\right)}{t^2 - \frac{1}{16}} = -2\ln\left|t^2 - \frac{1}{16}\right|$.

7. Обчислимо другий інтеграл I_2

Для обчислення I_2 скористаємося табличним інтегралом при $a = \frac{1}{4}$.

Отримаємо $I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t - \frac{1}{4}}{t + \frac{1}{4}}\right| = \ln\left|\frac{t - \frac{1}{4}}{t + \frac{1}{4}}\right|$.

8. Отримаємо відповідь.

Маємо $I = -2\ln\left|t^2 - \frac{1}{16}\right| + \ln\left|\frac{t - \frac{1}{4}}{t + \frac{1}{4}}\right| + C$. Повертаючись до змінної x,

отримуємо $I = -2\ln\left|\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right| + \ln\left|\frac{x - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}}\right| + C =$

$$= -2\ln\left|x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}\right| + \ln\left|\frac{x-1}{x - \frac{1}{2}}\right| + C = -2\ln\left|2x^2 - 3x + 1\right| + \ln\left|\frac{x-1}{2x-1}\right| + C.$$

Були виконані такі перетворення: $-2\ln\left|x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}\right| = -2\ln\left|\frac{2x^2 - 3x + 1}{2}\right| =$

$= -2\ln\left|2x^2 - 3x - 1\right| + 2\ln 2 = -2\ln\left|2x^2 - 3x - 1\right| + C_1$;

$$\ln\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right| = \ln\left|\frac{2(x-1)}{2x-1}\right| = \ln 2 + \ln\left|\frac{x-1}{2x-1}\right| = \ln\left|\frac{x-1}{2x-1}\right| + C_2;\ C_1 + C_2 + C \Rightarrow C.$$

Оформлення розв'язання прикладу

$$\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx = \left|2x^2-3x+1 = 2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right) = 2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)\right| =$$

$$= \int\frac{7-8x}{2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)}dx = \left|\begin{array}{l} x-\frac{3}{4}=t \\ x=\frac{3}{4}+t \\ dx=dt \end{array}\right| = \int\frac{7-8\left(t+\frac{3}{4}\right)}{2\left(t^2-\frac{1}{16}\right)}dt = \frac{1}{2}\int\frac{-8t+1}{t^2-\frac{1}{16}}dt = -4\int\frac{t}{t^2-\frac{1}{16}}dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2-\frac{1}{16}}dt = -2\int\frac{d\left(t^2-\frac{1}{16}\right)}{t^2-\frac{1}{16}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right| = -2\ln\left|t^2-\frac{1}{16}\right| + \ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= \left|t = x-\frac{3}{4}\right| = -2\ln\left|x^2-\frac{3x}{2}+\frac{1}{2}\right| + \ln\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right| + C = -2\ln\left|2x^2-3x+1\right| + \ln\left|\frac{x-1}{2x-1}\right| + C.$$

Правило інтегрування правильних дробово-раціональних функцій.

Щоб про інтегрувати правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, треба:

1. Розкласти многочлен $Q(x)$ на лінійні множники, які відповідають його дійсним кореням, та квадратні множники, які відповідають його комплексним кореням;
2. Виразити правильний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ через суму елементарних раціональних дробів із невизначеними коефіцієнтами та відшукати ці коефіцієнти;
3. Знайти $\frac{P(x)}{Q(x)}$ як суму інтегралів від знайдених елементарних раціональних дробів.

Загальний алгоритм інтегрування раціональних дробів $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

1. Якщо задано неправильний раціональний дріб ($m \geq n$), слід виділити в ньому цілу частину. Для цього виконати ділення чисельника на знаменник (цілою частиною є частка від ділення, а залишок – чисельником правильного дробу) і подати дріб у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = G_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)},\ \text{де}\ \frac{R_r(x)}{Q_n(x)} - \text{правильний дріб.}$$

2. Розкласти знаменник правильного дробу на лінійні і квадратні (D<0) множники.
3. Правильний раціональний дріб розкласти на найпростіші дроби за формулою

$$\frac{R_r(x)}{(x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^s} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots +$$

$$+\frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_sx+N_s}{(x+px+q)^s},(*)$$

де $A_1, A_2, \ldots A_k, M_1, \ldots M_s, N_1, \ldots N_s$ – невизначені коефіцієнти.

Роз'яснення до формули (*):

1) кожному множнику $(x-a)$ відповідає один дріб I-го типу $\dfrac{A}{x-a}$;

2) множнику $(x-a)^k$ відповідає k дробів I-го і II-го типів

$$\frac{A}{x-a} + \ldots + \frac{A}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A}{(x-a)^k};$$

3) множнику (x^2+px+q), у якого $D<0$, відповідає один дріб III-го типу $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

4. Обчислити невизначені коефіцієнти в попередньому розкладі.
5. Обчислити інтеграли від найпростіших дробів.

Для знаходження коефіцієнтів $A_1, A_2, \ldots, A_n, M_1, \ldots, M_n, N_1, \ldots, N_n$ застосовують два способи: **1) спосіб невизначених коефіцієнтів;**

2) спосіб надання аргументу окремих значень.

Важливо! Спосіб надання аргументу окремих значень **особливо зручний** у тому випадку, коли знаменник дробу **має дійсні корені.** У інших випадках цей спосіб теж скорочує обчислення, оскільки дає можливість уникнути розв'язування системи з числом рівнянь, яке дорівнює числу невідомих.

Корисно комбінувати обидва процеси: прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x і надавання x окремих значень. Рекомендуємо студенту оволодіти цими двома способами.

Приклад 5. Знайти інтеграл $I = \int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$.

Розв’язування прикладу

1. Попередні міркування.

Перш за все потрібно з’ясувати, до якого типу належить заданий інтеграл.

Бачимо, що задано інтеграл від **правильного раціонального дробу.**

2. Розкладіть знаменник дробу на множники.

Запишімо знаменник дробу у вигляді

$x^3 + 4x^2 + 4x = x\left(x^2 + 4x + 4\right) = x(x+2)^2$. Тепер $I = \int \frac{3x^2 + 8}{x(x+2)^2} dx$.

3. Напишіть розклад підінтегрального дробу на найпростіші дроби.

Множнику x у розкладі відповідає один доданок $\frac{A}{x}$. Множнику $(x+2)^2$ у розкладі відповідають два доданки $\frac{B}{x+2}$ і $\frac{C}{(x+2)^2}$.

Отже, $\frac{3x^2 + 8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$. (*)

4. Знайдіть коефіцієнти A,B,C у попередньому розкладі.

$$\frac{3x^2 + 8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B \cdot x(x+2) + C \cdot x}{x(x+2)^2}$$

$$3x^2 + 8 = A(x+2)^2 + B \cdot x(x+2) + C \cdot x. \qquad (**)$$

І-й спосіб. Знайдемо коефіцієнти *A, B і C* **методом надавання окремих значень.** Підставимо в ліву і праву частину тотожності (**) значення коренів знаменника $x = 0$ і $x = -2$. Оскільки коренів більше немає, а шуканих коефіцієнтів три, надаємо змінній x ще будь-якого значення, наприклад, $x = 1$.

$$\begin{array}{r||l}
x = 0 & 8 = A \cdot 4, \qquad \textit{звідси } A = 2; \\
x = -2 & 20 = C \cdot (-2), \qquad \textit{звідси } C = -10; \\
x = 1 & 11 = 18 + 3B - 10, \textit{ звідси } B = 1.
\end{array}$$

ІІ-й спосіб. Знайдемо коефіцієнти *A, B і C* **методом невизначених коефіцієнтів**. Розкриємо дужки в тотожності (**) і розмістимо многочлен у правій частині за степенями x.

$$3x^2+8=A(x+2)^2+B\cdot x(x+2)+C\cdot x$$
$$3x^2+8=A\left(x^2+4x+4\right)+Bx^2+2Bx+Cx$$
$$3x^2+8=Ax^2+4Ax+4A+Bx^2+2Bx+Cx$$
$$3x^2+8=(A+B)x^2+(4A+2B+C)x+4A$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах тотожності, отримаємо і потім розв'яжемо систему трьох рівнянь з трьома невідомими.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{l} 3=A+B, \\ 0=4A+2B+C, \\ 8=4A \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} A=2, \\ B=1, \\ C=-10. \end{array}\right.$$

Коефіцієнти в розкладі (*) обчислені. Отже,

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}.$$

5. Обчисліть інтеграл від найпростіших дробів і запишіть відповідь.

$$I=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}\right)dx=2\ln|x|+\ln|x+2|+\frac{10}{x+2}+C.$$

Увага! Можна було скористатися комбінованим методом для визначення коефіцієнтів розкладу. Спочатку підставити в ліву і праву частини тотожності (**) корені знаменника $x=0$ і $x=-2$ і знайти коефіцієнти A і C. Коефіцієнт B знайти, прирівнюючи відповідні коефіцієнти зліва і справа, наприклад, при x^2. Потрібно знайти лише один коефіцієнт, тому обмежимось одним степенем x^2 (або x).

Оформлення розв'язання прикладу (І-м способом)

$$\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx=\left|x^3+4x^2+4x=x(x+2)^2\right|=\int\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}dx=$$

$$=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\right)dx=\left|\begin{array}{l} 3x^2+8=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx \\ \begin{array}{c|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{l} 3=A+B, \\ 0=4A+2B+C, \\ 8=4A \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} A=2, \\ B=1, \\ C=-10. \end{array}\right. \end{array}\right|=$$

$$=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}\right)dx=2\ln|x|+\ln|x+2|+\frac{10}{x+2}+C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $I=\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$.

Розв'язування прикладу

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=\int\left(2x+\frac{1}{x^4+3x^2}\right)dx==\int\left(2x+\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}\right)dx=$$

$$=\int\left(2x+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Mx+N}{x^2+3}\right)dx=\left|\begin{array}{l} 1=Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+\left(Mx+N\right)x^2 \\ x=0\rightarrow 1=3B\rightarrow B=\frac{1}{3}, \\ \begin{array}{c|l} x & 0=3A,\ \textit{звідси}\ A=0, \\ x^2 & 0=B+N,\ \textit{звідси}\ N=-B=-\frac{1}{3}, \\ x^3 & 0=A+M,\ \textit{звідси}\ M=-A=0. \end{array}\end{array}\right|=$$

$$=\int\left(2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}\right)dx=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$