

## Лекція 3

### Ранг матриці

Для вирішення і дослідження ряду математичних і прикладних задач важливе значення має поняття рангу матриці.

Нехай дана матриця  $A$  розміром  $m \times n$ . У матриці  $A$  довільно виберемо рядків і стовпців. Елементи, що стоять на перетині вибраних  $k$  рядків і  $k$  стовпців, утворюють квадратну матрицю порядку  $k$ . Визначник такої матриці називається мінором порядку  $k$ .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

У матриці  $A$  виділений мінор 2-го порядку. Він відмінний від нуля.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 3 \neq 0$$

**Визначення.** *Рангом* матриці  $A$  називається найвищий порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці.

**Визначення.** *Рангом* матриці називається максимальна кількість лінійно незалежних рядків цієї системи.

(Лінійно залежні рядки системи, коли для рядків матриці  $S_1, S_2, S_3$  можна знайти такі числа  $\alpha_1, \alpha_2$ , що  $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 = S_3$ ).

Позначають ранг матриці  $A$  як  $\text{rang}A$ ,  $\text{rank}A$  або  $r(A)$ ,  $\text{rg}(A)$ .

З означення рангу виходить:

а) якщо матриця  $A_{m \times n}$  - ненульова матриця, то  $\text{rang}A \leq \min(m; n)$  (ранг матриці  $A_{m \times n}$  не менше 1 і не перевищує меншого з її розмірів);

б)  $\text{rang}A = 0$  тоді і лише тоді, коли всі елементи матриці дорівнюють нулю, тобто  $A = 0$ ;

в) для квадратної матриці  $n$ -го порядку  $\text{rang}A = n$  тоді і лише тоді, коли матриця  $A$  - невироджена (тобто визначник цієї матриці не дорівнює нулю).

**Приклад 1.** Обчислити ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язання.

Матриця  $A$  має четвертий порядок, тому  $\text{rang}A \leq 4$ . Оскільки матриця  $A$  містить нульовий стовпець, тому  $|A| = 0$  і  $\text{rang}A \leq 3$ . Всі підматриці третього порядку теж містять нульовий стовпець і тому мають нульові визначники, значить  $\text{rang}A \leq 2$ . Всі підматриці другого порядку або мають нульовий стовпець (другий або четвертий), або мають пропорційні стовпці (перший і третій), тому теж мають нульові визначники; таким чином  $\text{rang}A \leq 1$ . Оскільки матриця  $A$  містить ненульові елементи, тобто не вироджені матриці першого порядку,  $\text{rang}A = 1$ .

**Приклад 2.** Обчислити ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання.

Для ненульової матриці  $A_{3 \times 4}$   $1 \leq \text{rang}A \leq \min(3; 4) = 3$ .

Перевіримо, чи рівний ранг 3, для цього обчислимо усі мінори третього порядку, тобто визначники всіх підматриць третього порядку (їх всього 4, їх отримуємо при викреслюванні одного із стовпців матриці):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки усі мінори третього порядку нульові,  $\text{rang}A \leq 2$ . Існує ненульовий мінор другого порядку, наприклад:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0. \text{ Робимо висновок, що } \text{rang}A = 2.$$

У загальному випадку визначення рангу матриці перебором усіх мінорів досить трудомістке. Для знаходження рангу, матрицю приводять до

ступінчастого (трапецієвидного) вигляду, використовуючи елементарні перетворення матриці.

**Визначення.** Елементарними перетвореннями матриці називають наступні:

- 1) відкидання нульового рядка (стовпця);
- 2) множення (ділення) всіх елементів рядка (стовпця) матриці на число, відмінне від нуля;
- 3) зміна порядку рядків (стовпців) матриці;
- 4) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число;
- 5) Транспонування матриці.

**Теорема.** Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці.

**Визначення.** Дві матриці  $A$  і  $B$  називаються еквівалентними, якщо одна з них отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень. Записується як  $A \sim B$ .

За допомогою елементарних перетворень можна привести матрицю до так званого ступінчастого (або трапецієвидного) вигляду, коли легко обчислюється її ранг.

Матриця  $A$  називається трапецієвидною, якщо вона має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}$$

де  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ;  $r \leq k$ .

Очевидно, що ранг ступінчастої матриці рівний  $r$ , оскільки є мінор  $r$ -го порядку, відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Покажемо на прикладі алгоритм обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень.

**Приклад 3.** Знайти ранг матриці  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Кількість ненульових рядків після приведення матриці до трапецієвидного вигляду дорівнює 2. Значить  $\text{rang}A = 2$ .

**Приклад 4.** Знайти ранг матриці  $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 20 \\ 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Розв'язання.  $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 20 \\ 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 7 \\ 9 & 6 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -12 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Кількість ненульових рядків після приведення матриці до трапецієвидного вигляду дорівнює 3. Значить  $\text{rang}A = 3$

**Визначення.** Відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці, називається **базисним**. В матриці може бути декілька базисних мінорів.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \text{або} \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) - (-3) \cdot 3 = -12 + 9 = -3 \neq 0.$$

$M_1, M_2$  - базисні мінори.

## Обернена матриця

Для кожного числа  $a \neq 0$  існує обернено число  $a^{-1}$  таке, що добуток  $a \cdot a^{-1} = 1$ . Для квадратних матриць також вводиться аналогічне поняття.

**Означення.** Матриця  $A^{-1}$  називається *оберненою по відношенню до квадратної матриці*  $A$ , якщо при множенні цієї матриці на дану як справа, так і зліва виходить одинична матриця:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

З визначення виходить, що лише квадратна матриця має обернену; в цьому випадку і обернена матриця є квадратною того ж порядку.

Проте не кожна квадратна матриця має зворотну. Для існування оберненої матриці  $A^{-1}$  такою умовою є вимога  $|A| \neq 0$ .

**Означення.** Якщо визначник матриці відрізняється від нуля ( $|A| \neq 0$ ), то матриця називається *невиродженою*, в протилежному випадку (при  $|A| = 0$ ) матриця називається *виродженою*.

**Теорема (необхідна і достатня умова існування оберненої матриці).**  
*Обернена матриця  $A^{-1}$  існує і при тому єдина тоді і тільки тоді, коли матриця  $A$  не вироджена.*

Обчислюють обернену матрицю за формулою  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$

### Алгоритм обчислення оберненої матриці:

1. Знаходимо визначник матриці  $A$ . Якщо  $|A| = 0$ , то матриця  $A$  – вироджена і оберненої матриці  $A^{-1}$  не існує. Якщо  $|A| \neq 0$ , то матриця  $A$  - не вироджена і обернена матриця існує.
2. Знаходимо матрицю  $A^T$ , транспоновану до  $A$ .

3. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці  $A_{ij}^T = A_{ji}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ) і складаємо з них приєднану матрицю  $\tilde{A}: \tilde{a}_{ij} = A_{ij}^T = A_{ji}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ).
4. Обчислюємо обернену матрицю за формулою  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$ .
5. Перевіряємо правильність обчислення оберненої матриці  $A^{-1}$ , виходячи із її означення  $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$ .

**Приклад.** Знайти матрицю, обернену до даної:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання.

1. Знаходимо визначник матриці  $A$ . В даному випадку знаходимо визначник матриці методом трикутника:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 \cdot 3 - (-2) \cdot 5 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 10 + 0 + 0 - (-30) - 0 - 16 = 10 + 30 - 16 = 24$$

Визначник матриці  $|A| = 24 \neq 0$ , тобто матриця  $A$  – невироджена і обернена матриця  $A^{-1}$  існує.

2. Знаходимо матрицю  $A^T$ , транспоновану до матриці  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Знаходимо алгебраїчне доповнення елементів матриці  $A^T$  і складаємо з них приєднану матрицю  $\tilde{A}$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{11}^T = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{12}^T = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{13}^T = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15;$$

$$A_{21}^T = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{22}^T = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{23}^T = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 12;$$

$$A_{31}^T = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{32}^T = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{33}^T = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -15 \\ -8 & 8 & 12 \\ 10 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Обчислюємо обернену матрицю за по формулою  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 10 & -4 & -15 \\ -8 & 8 & 12 \\ 10 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Слід зазначити, що можна отримати на комп'ютері такий результат:

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 10 & -4 & -15 \\ -8 & 8 & 12 \\ 10 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/24 & -4/24 & -15/24 \\ -8/24 & 8/24 & 12/24 \\ 10/24 & -1/24 & -3/24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,417 & -0,167 & 0,625 \\ -0,333 & 0,333 & 0,5 \\ 0,417 & -0,167 & -0,125 \end{pmatrix}$$

5. Щоб перевірити правильність обчислень оберненої матриці треба скористатися формулою:  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ .

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 10 & -4 & -15 \\ -8 & 8 & 12 \\ 10 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

**2-й спосіб.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & | & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & | & -10/3 & 4/3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10/24 & -4/24 & -1/8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -6/24 & 12/24 & 9/24 \\ 0 & 1 & 0 & | & -8/24 & 8/24 & 12/24 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10/24 & -4/24 & -3/24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 10/24 & -4/24 & -15/24 \\ 0 & 1 & 0 & | & -8/24 & 8/24 & 12/24 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10/24 & -4/24 & -3/24 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10/24 & -4/24 & -15/24 \\ -8/24 & 8/24 & 12/24 \\ 10/24 & -1/24 & -3/24 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 10 & -4 & -15 \\ -8 & 8 & 12 \\ 10 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$