Лекція 3

Ранг матриці

Для вирішення і дослідження ряду математичних і прикладних задач важливе значення має поняття рангу матриці.

Нехай дана матриця A розміром $m \times n$. У матриці A довільно виберемо k рядків і k стовпців. Елементи, що стоять на перетині вибраних k рядків і k стовпців, утворюють квадратну матрицю порядку k. Визначник такої матриці називається мінором порядку k.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

У матриці A виділений мінор 2-го порядку. Він відмінний від нуля.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 3 \neq 0$$

Визначення. ***Рангом*** матриці A називається найвищий порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці.

Визначення. ***Рангом*** матриці називається максимальна кількість лінійно незалежних рядків цієї системи.

(Лінійно залежні рядки системи, коли для рядків матриці S_1, S_2, S_3 можна знайти такі числа α_1, α_2, що $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 = S_3$).

Позначають ранг матриці A як $rangA$, $rankA$ або $r(A)$, $rg(A)$.

З означення рангу виходить:

а) якщо матриця $A_{m\times n}$ - ненульова матриця, то ранг $1 \leq rangA \leq \min(m;n)$ (ранг матриці $A_{m\times n}$ не менше 1 і не перевищує меншого з її розмірів);

б) $rangA = 0$ тоді і лише тоді, коли всі елементи матриці дорівнюють нулю, тобто $A = 0$;

в) для квадратної матриці n-го порядку $rangA = n$ тоді і лише тоді, коли матриця A - невироджена (тобто визначник цієї матриці не дорівнює нулю).

Приклад 1. Обчислити ранг матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв’язання.

Матриця A має четвертий порядок, тому $rangA \le 4$. Оскільки матриця A містить нульовий стовпець, тому $|A| = 0$ і $rangA \le 3$. Всі підматриці третього порядку теж містять нульовий стовпець і тому мають нульові визначники, значить $rangA \le 2$. Всі підматриці другого порядку або мають нульовий стовпець (другий або четвертий), або мають пропорційні стовпці (перший і третій), тому теж мають нульові визначники; таким чином $rangA \le 1$. Оскільки матриця А містить ненульові елементи, тобто не вироджені матриці першого порядку, $rangA = 1$.

Приклад 2. Обчислити ранг матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Розв’язання.

Для ненульової матриці $A_{3\times4}$ $1 \le rangA \le \min(3;4) = 3$.

Перевіримо, чи рівний ранг 3, для цього обчислимо усі мінори третього порядку, тобто визначники всіх підматриць третього порядку (їх всього 4, їх отримуємо при викреслюванні одного із стовпців матриці):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки усі мінори третього порядку нульові, $rangA \le 2$. Існує ненульовий мінор другого порядку, наприклад:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \ne 0$. Робимо висновок, що $rangA = 2$.

У загальному випадку визначення рангу матриці перебором усіх мінорів досить трудомістке. Для знаходження рангу, матрицю приводять до ступінчастого (трапецієвидного) вигляду, використовуючи елементарні перетворення матриці.

Визначення. Елементарними перетвореннями матриці називають наступні:

1) відкидання нульового рядка (стовпця);
2) множення (ділення) всіх елементів рядка (стовпця) матриці на число, відмінне від нуля;
3) зміна порядку рядків (стовпців) матриці;
4) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число;
5) Транспонування матриці.

Теорема. Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці.

Визначення. Дві матриці A і B називаються еквівалентними, якщо одна з них отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень. Записується як $A \sim B$.

За допомогою елементарних перетворень можна привести матрицю до так званого ступінчастого (або трапецієвидного) вигляду, коли легко обчислюється її ранг.

Матриця A називається трапецієвидною, якщо вона має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}$$

де $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$; $r \leq k$.

Очевидно, що ранг ступінчастої матриці рівний r, оскільки є мінор r-го порядку, відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Покажемо на прикладі алгоритм обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень.

Приклад 3. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Розв'язання.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Кількість ненульових рядків після приведення матриці до трапецієвидного вигляду дорівнює 2. Значить $rangA=2$.

Приклад 4. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 20 \\ 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Розв'язання. $A=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 20 \\ 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 7 \\ 9 & 6 & 20 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -12 & -7 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Кількість ненульових рядків після приведення матриці до трапецієвидного вигляду дорівнює 3. Значить $rangA=3$

Визначення. Відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці, називається **базисним**. В матриці може бути декілька базисних мінорів.
Приклад.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$M_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=-3\neq 0$ або $M_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}=2\cdot(-6)-(-3)\cdot 3=-12+9=-3\neq 0$.

M_1, M_2 - базисні мінори.

Обернена матриця

Для кожного числа $a \neq 0$ існує обернено число a^{-1} таке, що добуток $a \cdot a^{-1} = 1$. Для квадратних матриць також вводиться аналогічне поняття.

Означення. *Матриця* A^{-1} *називається* ***оберненою по відношенню до квадратної матриці*** A, *якщо при множенні цієї матриці на дану як справа, так і зліва виходить одинична матриця*:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

З визначення виходить, що <u>лише квадратна</u> матриця має обернену; в цьому випадку і обернена матриця є квадратною того ж порядку.

Проте не кожна квадратна матриця має зворотну. Для існування оберненої матриці A^{-1} такою умовою є вимога $|A| \neq 0$.

Означення. Якщо визначник матриці відрізняється від нуля $\left(|A| \neq 0\right)$, то матриця називається ***невиродженою***, в протилежному випадку (при $|A| = 0$) матриця називається ***виродженою***.

Теорема (необхідна і и достатня умова існування оберненої матриці). *Обернена матриця* A^{-1} *існує і при тому єдина тоді і тільки тоді, коли матриця* A невироджена.

Обчислюють обернену матрицю за формулою $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$

Алгоритм обчислення оберненої матриці:

1. Знаходимо визначник матриці A. Якщо $|A| = 0$, то матриця A – вироджена і оберненої матриці A^{-1} не існує. Якщо $|A| \neq 0$, то матриця A - невироджена і обернена матриця існує.
2. Знаходимо матрицю A^T, транспоновану до A.

3. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці $A_{ij}^{T} = A_{ji} \left(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n \right)$ і складаємо з них приєднану матрицю $\tilde{A} : \tilde{a}_{ij} = A_{ij}^{T} = A_{ji} \left(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n \right)$.

4. Обчислюємо обернену матрицю за формулою $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$.

5. Перевіряємо правильність обчислення оберненої матриці A^{-1}, виходячи із її означення $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = E$.

Приклад. Знайти матрицю, обернену до даної:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв’язання.

1. Знаходимо визначник матриці A**.** В даному випадку знаходимо визначник матриці методом трикутника:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 \cdot 3 - (-2) \cdot 5 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 10 + 0 + 0 - (-30) - 0 - 16 = 10 + 30 - 16 = 24$$

Визначник матриці $|A| = 24 \neq 0$, тобто матриця A – невироджена і обернена матриця A^{-1} існує.

2. Знаходимо матрицю A^{T}, транспоновану до матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Знаходимо алгебраїчне доповнення елементів матриці A^T і складаємо з них приєднану матрицю $\tilde{A}$:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{11}^T = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10; \qquad A_{12}^T = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4; \qquad A_{13}^T = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15;$$

$$A_{21}^T = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8; \qquad A_{22}^T = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8; \qquad A_{23}^T = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 12;$$

$$A_{31}^T = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 10; \qquad A_{32}^T = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4; \qquad A_{33}^T = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -15 \\ -8 & 8 & 12 \\ 10 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Обчислюємо обернену матрицю за по формулою $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 10 & -4 & -15 \\ -8 & 8 & 12 \\ 10 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Слід зазначити, що можна отримати на комп'ютері такий результат:

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 10 & -4 & -15 \\ -8 & 8 & 12 \\ 10 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/24 & -4/24 & -15/24 \\ -8/24 & 8/24 & 12/24 \\ 10/24 & -1/24 & -3/24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,417 & -0,167 & 0,625 \\ -0,333 & 0,333 & 0,5 \\ 0,417 & -0,167 & -0,125 \end{pmatrix}$$

5. Щоб перевірити правильність обчислень оберненої матриці треба скористатися формулою: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}10 & -4 & -15\\ -8 & 8 & 12\\ 10 & -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}24 & 0 & 0\\ 0 & 24 & 0\\ 0 & 0 & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

2-й спосіб.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -12 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 8 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 4/3 & -1/3 & 0\\ 0 & 4 & 8 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 4/3 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & -8 & -10/3 & 4/3 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 4/3 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 10/24 & -4/24 & -1/8\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & -6/24 & 12/24 & 9/24\\ 0 & 1 & 0 & -8/24 & 8/24 & 12/24\\ 0 & 0 & 1 & 10/24 & -4/24 & -3/24\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 10/24 & -4/24 & -15/24\\ 0 & 1 & 0 & -8/24 & 8/24 & 12/24\\ 0 & 0 & 1 & 10/24 & -4/24 & -3/24\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}10/24 & -4/24 & -15/24\\ -8/24 & 8/24 & 12/24\\ 10/24 & -1/24 & -3/24\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}10 & -4 & -15\\ -8 & 8 & 12\\ 10 & -1 & -3\end{pmatrix}$$