

Невизначений інтеграл

У попередньому семестрі розглядалася наступна задача: дана функція $f(x)$, треба знайти її похідну, тобто функцію $f'(x)$. Розглянемо задачу, обернену до знаходження похідної: відшукування функції за її похідною.

Нехай дана функція $f(x)$; треба знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на проміжку $(a; b)$, якщо $F(x)$ неперервна, якщо $F(x)$ є диференційована на цьому проміжку, і справджується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад. Функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$ є первісною для функції $y = x^2$ в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, тому що на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$ є неперервною та диференційованою, причому $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ справджується рівність $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Очевидно, що первісними є також будь які функції

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C, \text{ де } C - \text{ стала, оскільки}$$

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x).$$

Зауваження. Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то функція $F(x) + C$, де C – довільна стала, також є первісною функції $f(x)$.

В зв'язку із введенням поняття первісної $F(x)$ для функції $f(x)$ виникає ряд запитань:

- 1) Для якої функції $f(x)$ на заданому проміжку X існує первісна функція $F(x)$?
- 2) Якщо для функції $f(x)$ первісна існує, то чи одним способом вона визначається, тобто скільки первісних може мати функція?
- 3) Якщо $F(x)$ і $P(x)$ дві первісні функції для функції $f(x)$, то як вони відрізняються між собою?

Відповіді сформулюємо в вигляді теорем.

Теорема 1. (про первісні неперервних функцій). Будь-яка неперервна на проміжку X функція має на ньому первісну.

Теорема 2. (про безліч первісних для заданої функції). Якщо $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$ на X , то для будь-якого числа $C \in \mathbb{R}$ функція $F(x) + C$ є також первісною функції $f(x)$ на X .

Теорема 3. (про різницю двох первісних заданої функції). Будь-які дві первісні заданої функції відрізняються одна від одної на сталу величину.

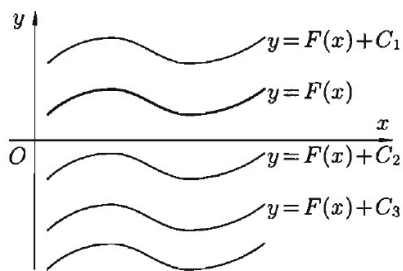
Означення. *Невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ на проміжку X називається множина всіх первісних функції $f(x)$ на цьому проміжку. Позначається невизначений інтеграл символом $\int f(x)dx$. Отже, за визначенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Знак $\int$ – знак інтеграла, $f(x)$ називають підінтегральною функцією, букву x називають змінною інтегрування, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Зауваження. Невизначений інтеграл являє собою множину функцій $F(x)+C$.

Операція знаходження невизначеного інтеграла, тобто множини всіх первісних деякої функції, називається **інтегруванням** даної функції.



С геометричній точки зору невизначений інтеграл представляє сукупність кривих, зміщених відносно друг друга вздовж осі Oy .

Слід відзначити, що якщо похідна елементарної функції завжди є елементарною функцією, то первісна від елементарної функції, може бути і не елементарною, тобто представленою в вигляді скінченної комбінації елементарних функцій. Це, наприклад, функції $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2} , $\sin x^2$, $\cos x^2$. Для подібних функцій розроблені методи, що дозволяють знаходити первісну наближено.

Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів

Властивість 1. *Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто*

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

Зауваження. Завдяки цієї властивості правильність інтегрування перевіряється диференціюванням. Наприклад, рівність

$$\int (4x^3 + 7) dx = x^4 + 7x + C, \text{ правильна, тому що } (x^4 + 7x + C)' = 4x^3 + 7$$

Властивість 2. *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:*

$$d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx.$$

Властивість 3. *Невизначений інтеграл від похідної деякої функції або від її диференціала дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої, тобто:*

$$\int F'(x) dx = F(x) + C \text{ або } \int dF(x) = F(x) + C.$$

Властивість 4. *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто виконується рівність:*

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx, \text{ де } a \neq 0 - \text{ стала.}$$

Властивість 5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми (різниці) двох або декілька x функцій дорівнює алгебраїчній сумі (різниці) їх інтегралів:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

Властивість 6. (Інваріантність формул інтегрування). Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то і $\int f(u) du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x)$, довільна функція, що має неперервну похідну.

Таким чином, формула для невизначеного інтеграла залишається правильною незалежно від того, є змінна інтегрування незалежною змінною або будь-якою функцією від неї, що має неперервну похідну.

Таким чином з формули $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ заміною x на u ($u = \varphi(x)$) отримаємо $\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$.

$$\text{Зокрема, } \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C, \quad \int \ln^3 x d(\ln x) = \frac{\ln^4 x}{4} + C,$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C.$$

При обчисленні невизначених інтегралів можна застосовувати **наступні правила**.

$$1. \text{ Якщо } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C.$$

$$2. \text{ Якщо } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(x+b) dx = F(x+b) + C.$$

$$3. \text{ Якщо } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

При інтегруванні користуються таблицею інтегралів. Справедливість формул таблиці можна перевірити, якщо взяти похідну правої частини рівності, при цьому вона буде дорівнювати підінтегральній функції.

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

$$1. \int 0 \cdot dx = C.$$

$$13. \int shx dx = chx + C$$

$$2. \int dx = x + C.$$

$$14. \int chx dx = shx + C$$

$$3. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad (m \neq -1).$$

$$15. \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$20. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

$$9. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$-a < x < a, a > 0.$$

$$10. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \quad a \neq 0.$$

$$11. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$23. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

Методи інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування.

Цей метод ґрунтується на розкладі підінтегральної функції в лінійну комбінацію більш простих функцій та на застосуванні властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад . Обчислити інтеграл: $\int \left(5 \cos x - 9x^2 + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

Розв'язання. Застосовуючи властивість лінійності невизначеного інтеграла, маємо

$$\begin{aligned} \int \left(5 \cos x - 9x^2 + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx &= 5 \int \cos x dx - 9 \int x^2 dx + 7 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= 5 \sin x - 3x^3 + 7 \arcsin x + C \end{aligned}$$

Приклад . Обчислити інтеграл: $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$.

Розв'язання.
$$\begin{aligned} \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx &= \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \\ &= \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C. \end{aligned}$$

Приклад . Обчислити інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2+4} dx &= \int \frac{(x^2+4)-4}{x^2+4} dx = \int \left(1 - \frac{4}{x^2+4} \right) dx = \int dx - 4 \int \frac{1}{x^2+4} dx = \\ &= x - 4 \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C = x - 2 \arctg \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Метод підведення під знак диференціала

Диференціал функції $y = f(x)$ дорівнює $dy = y'dx$. Цю формулу можна застосовувати і в зворотному порядку $y'dx = dy$. Наприклад:

$$3x^2 dx = d(x^3), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\arcsin x)$$

Тому часто для приведення інтегралу до табличного застосовують формулу:

$$f'(u) du = d(f(u)).$$

Припустимо, що в інтегралі $\int f(x) dx = F(x) + C$ від підінтегральної функції $f(x)$ можна відокремити функцію $\varphi(x) = u$ таку, що підінтегральний вираз запишеться у вигляді $f(x) dx = g(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = g(u) du$.

Тоді за теоремою маємо

$$\int f(x) dx = \int g(u) du$$

Приклад. $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int \sin^3 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

Приклад. $\int \arcsin^9 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin^9 x \cdot d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^{10} x}{10} + C$

При операції підведення під знак диференціала часто використовують такі перетворення диференціала:

$$dx = d(x + a);$$

$$dx = \frac{1}{a} d(ax);$$

$$dx = \frac{1}{a} d(ax + b);$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x);$$

$$\frac{dx}{x+a} = d(\ln(x+a));$$

$$x^n dx = \frac{1}{n+1} d(x^{n+1} + a);$$

$$\cos x dx = d(\sin x);$$

$$\sin x dx = -d(\cos x);$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x);$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x);$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x);$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x).$$

Приклади.

$$1) \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C$$

$$2) \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C;$$

$$3) \int \frac{dx}{x+8} = \int \frac{d(x+8)}{x+8} = \ln |x+8| + C$$

Метод заміни змінної інтегрування

В багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дозволяє звести знаходження шуканого інтеграла до табличного.

Приклад . Знайти $\int \sqrt{3x+4} dx$.

Розв'язок. Позначимо $t = 3x + 4$. Тоді:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3x+4} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 4 \\ dt = (3x + 4)' dx = 3dx \\ \frac{1}{3} dt = dx \end{array} \right| \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{3} \cdot dt = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(3x+4)^3} + C. \end{aligned}$$

Приклад . Знайти $\int e^{\sin x} \cos x dx$.

Розв'язок. Позначимо $t = \sin x$. Тоді:

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = (\sin x)' dx = \cos x dx \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$$

Метод інтегрування частинами

Виведемо формулу, яку називають *формулою інтегрування частинами*.

Нехай u і v – дві функції змінної x , що диференційовані на $[a, b]$.

Оскільки $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, то функція $u \cdot v$ – первісна для суми $u'v + uv'$. Тоді маємо

$$\int (u'v + uv')dx = uv + C.$$

$$\int vu'dx + \int uv'dx = uv + C$$

Враховуючи, що $u'dx = du$, $v'dx = dv$, будемо мати

$$\int vdu + \int u dv = uv + C.$$

Отже,

$$\int u dv = uv - \int vdu + C.$$

Оскільки $\int vdu$ включає довільну сталу, то до неї можна включити і сталу C .

Остаточно отримаємо вираз:

$$\int u dv = uv - \int vdu,$$

що називають *формулою інтегрування частинами*.

За допомогою цієї формули знаходження інтеграла $\int u dv$ зводиться к пошуку іншого інтеграла $\int vdu$, який буде або табличним, або подібним початковому, або інтеграла, що знаходиться за допомогою заміни змінної. При цьому за u береться така функція, яка при диференціюванні спрощується, а за dv – та частина підінтегрального виразу, інтеграл від якої відомий або може бути знайдено.

Визначимо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегруванням частинами.

1. Інтеграли вигляду $\int P(x)e^{\alpha x} dx$, $\int P(x)\sin \alpha x dx$, $\int P(x)\cos \alpha x dx$, де $P(x)$ – многочлен, α - число. За u слід прийняти $P(x)$, а за dv – відповідний вираз $e^{\alpha x} dx$, $\sin \alpha x dx$, $\cos \alpha x dx$.
2. Інтеграли вигляду $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x dx$. За u приймають відповідно функції $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv – вираз $P(x)dx$.
3. Інтеграли вигляду, $\int e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x dx$, де α и β - числа. Не має різниці, що прийняти за u : $e^{\alpha x} dx$, або $\sin \beta x$.
- 4.

Зауваження. Інтегрування частинами може застосовуватися декілька разів.

Приклад . Знайти $\int x \cos x dx$.

$$\text{Розв'язок. } \int x \cos x dx = \left\| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\| = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Приклад . Знайти $\int (4x + 2) \cos 5x dx$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \int (4x + 2) \cos 5x dx &= \left\| \begin{array}{l} u = 4x + 2 \\ du = 4dx \\ dv = \cos 5x dx \\ v = \int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \sin 5x \end{array} \right\| = (4x + 2) \cdot \frac{1}{5} \sin 5x - \int \frac{1}{5} \sin 5x \cdot 4dx = \\ &= \frac{4x + 2}{5} \sin 5x + \frac{4}{25} \cos 5x + C \end{aligned}$$

Приклад . Знайти $\int \ln x dx$.

$$\int \ln x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \\ v = \int dx = x \end{array} \right\| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

Приклад . Знайти $\int \sin x \cdot e^x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язок. } I &= \int \sin x \cdot e^x dx = \int \sin x de^x = \sin x \cdot e^x - \int e^x d(\sin x) = \\ &= e^x \sin x - \int \cos x \cdot e^x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d(\cos x) = \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int \sin x \cdot e^x dx = e^x (\sin x - \cos x) - I. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } 2I = e^x (\sin x - \cos x) \quad \text{або} \quad I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$$