Лекція 3

Невизначений інтеграл

У попередньому семестрі розглядалася наступна задача: дана функція $f(x)$, треба знайти її похідну, тобто функцію $f'(x)$. Розглянемо задачу, обернену до знаходження похідної: відшукання функції за її похідною.

Нехай дана функція $f(x)$; треба знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Означення. Функція $F(x)$ називається ***первісною*** функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ неперервна, якщо $F(x)$ є диференційована на цьому проміжку, і справджується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад. Функція $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ є первісною для функції $y = x^2$ в інтервалі $(-\infty;+\infty)$, тому що на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ функція $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ є неперервною та диференційованою, причому $\forall x \in (-\infty;+\infty)$ справджується рівність $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Очевидно, що первісними є також будь які функції

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$, де C – стала, оскільки

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x).$$

Зауваження. Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то функція $F(x) + C$, де C – довільна стала, також є первісною функції $f(x)$.

В зв'язку із введенням поняття первісної $F(x)$ для функції $f(x)$ виникає ряд запитань:

1) Для якої функції $f(x)$ на заданому проміжку X існує первісна функція $F(x)$?
2) Якщо для функції $f(x)$ первісна існує, то чи одним способом вона визначається, тобто скільки первісних може мати функція?
3) Якщо $F(x)$ і $P(x)$ дві первісні функції для функції $f(x)$, то як вони відрізняються між собою?

Відповіді сформулюємо в вигляді теорем.

Теорема 1. (про первісні неперервних функцій). Будь-яка неперервна на проміжку X функція має на ньому первісну.

Теорема 2. (про безліч первісних для заданої функції). Якщо $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$ на X, то для будь-якого числа $C \in \mathbb{R}$ функція $F(x)+C$ є також первісною функції $f(x)$ на X.

Теорема 3. (про різницю двох первісних заданої функції). Будь-які дві первісні заданої функції відрізняються одна від одної на сталу величину.

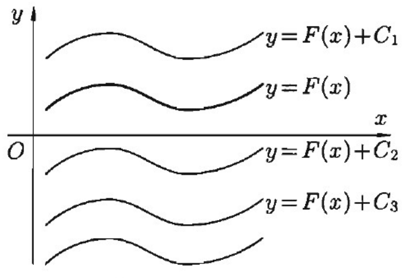
Означення. ***Невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на проміжку X називається множина всіх первісних функції $f(x)$ на цьому проміжку. Позначається невизначений інтеграл символом $\int f(x)dx$. Отже, за визначенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Знак $\int$ – знак інтеграла, $f(x)$ називають підінтегральною функцією, букву x називають змінною інтегрування, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Зауваження. Невизначений інтеграл являє собою множину функцій $F(x)+C$.

Операція знаходження невизначеного інтеграла, тобто множини всіх первісних деякої функції, називається **інтегруванням** даної функції.



С геометричній точки зору невизначений інтеграл представляє сукупність кривих, зміщених відносно друг друга вздовж осі Oy.

Слід відзначити , що якщо похідна елементарної функції завжди є елементарною функцією, то первісна від елементарної функції, може бути і не елементарною, тобто представленою в вигляді скінченної комбінації елементарних функцій. Це, наприклад, функції $\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}, e^{-x^2}$, $\sin x^2, \cos x^2$. Для подібних функцій розроблені методи, що дозволяють знаходити первісну наближено.

Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів

Властивість 1. *Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x).$$

Зауваження. Завдяки цієї властивості правильність інтегрування перевіряється диференціюванням. Наприклад, рівність

$\int\left(4x^3+7\right)dx = x^4+7x+C$, правильна, тому що $\left(x^4+7x+C\right)' = 4x^3+7$

Властивість 2. *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:*

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Властивість 3. *Невизначений інтеграл від похідної деякої функції або від її диференціала дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої, тобто:*

$$\int F'(x)dx = F(x)+C \quad \text{або} \quad \int dF(x) = F(x)+C.$$

Властивість 4. *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто виконується рівність:*

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \text{ де } a \neq 0 \text{ - стала.}$$

Властивість 5. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми (різниці) двох або декілька х функцій дорівнює алгебраїчній сумі (різниці) їх інтегралів*:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

Властивість 6. *(Інваріантність формул інтегрування). Якщо* $\int f(x)dx = F(x) + C$, *то і* $\int f(u)du = F(u) + C$, *де* $u = \varphi(x)$, *довільна функція, що має неперервну похідну.*

Таким чином, формула для невизначеного інтеграла залишається правильною незалежно від того, є змінна інтегрування незалежною змінною або будь-якою функцією від неї, що має неперервну похідну.

Таким чином з формули $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ заміною x на u ($u = \varphi(x)$) отримаємо $\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$.

Зокрема, $\int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$, $\int \ln^3 x d(\ln x) = \frac{\ln^4 x}{4} + C$,

$$\int tg^3 x d(tgx) = \frac{tg^4 x}{4} + C.$$

При обчисленні невизначених інтегралів можна застосовувати **наступні правила**.

1. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$.

2. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$.

3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

При інтегруванні користуються таблицею інтегралів. Справедливість формул таблиці можна перевірити, якщо взяти похідну правої частини рівності, при цьому вона буде дорівнювати підінтегральній функції.

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int 0 \cdot dx = C.$

2. $\int dx = x + C.$

3. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad (m \neq -1).$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

9. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

10. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

13. $\int shxdx = chx + C$

14. $\int chxdx = shx + C$

15. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

16. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

18. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C.$

19. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

20. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C.$

21. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,$

$-a < x < a, a > 0.$

22. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a \neq 0.$

23. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

Методи інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування.

Цей метод ґрунтується на розкладі підінтегральної функції в лінійну комбінацію більш простих функцій та на застосуванні властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад . Обчислити інтеграл: $\int \left(5\cos x - 9x^2 + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

Розв’язання. Застосовуючи властивість лінійності невизначеного інтеграла, маємо

$$\int \left(5\cos x - 9x^2 + \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 5\int \cos x dx - 9\int x^2 dx + 7\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= 5\sin x - 3x^3 + 7arcsix + C$$

Приклад . Обчислити інтеграл: $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx$.

Розв’язання. $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} \right) dx =$

$$= \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C.$$

Приклад . Обчислити інтеграл

$$\int \frac{x^2}{x^2+4} dx = \int \frac{(x^2+4)-4}{x^2+4} dx = \int \left(1 - \frac{4}{x^2+4} \right) dx = \int dx - 4\int \frac{1}{x^2+4} dx =$$

$$= x - 4 \cdot \frac{1}{2} arctg\frac{x}{2} + C = x - 2arctg\frac{x}{2} + C.$$

Метод підведення під знак диференціала

Диференціал функції $y = f(x)$ дорівнює $dy = y'dx$. Цю формулу можна застосовувати і в зворотному порядку $y'dx = dy$. Наприклад:

$$3x^2dx = d\left(x^3\right), \qquad \cos x dx = d(\sin x), \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x)$$

Тому часто для приведення інтегралу до табличного застосовують формулу:

$$f'(u)du = d\left(f(u)\right).$$

Припустимо, що в інтегралі $\int f(x)dx = F(x) + C$ від підінтегральної функції $f(x)$ можна відокремити функцію $\varphi(x) = u$ таку, що підінтегральний вираз запишеться у вигляді $f(x)dx = g\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = g(u)du$.

Тоді за теоремою маємо

$$\int f(x)dx = \int g(u)du$$

Приклад. $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int \sin^3 x \cdot d(\sin x) = \dfrac{\sin^4 x}{4} + C$

Приклад. $\int \arcsin^9 x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin^9 x \cdot d(\arcsin x) = \dfrac{\arcsin^{10} x}{10} + C$

При операції підведення під знак диференціала часто використовують такі перетворення диференціала:

$dx = d(x+a)$; $\quad dx = \dfrac{1}{a}d(ax)$; $\quad dx = \dfrac{1}{a}d(ax+b)$;

$\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$; $\quad \dfrac{dx}{x+a} = d\left(\ln(x+a)\right)$; $\quad x^n dx = \dfrac{1}{n+1}d\left(x^{n+1}+a\right)$;

$\cos x dx = d(\sin x)$; $\quad \sin x dx = -d(\cos x)$; $\quad \dfrac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$;

$\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$; $\quad \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$; $\quad \dfrac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$.

Приклади.

1) $\int ctgxdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d\left(\sin x\right)}{\sin x} = \ln\left|\sin x\right| + C$

2) $\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{-d\left(\cos x\right)}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right| + C$;

3) $\int \frac{dx}{x+8} = \int \frac{d\left(x+8\right)}{x+8} = \ln\left|x+8\right| + C$

Метод заміни змінної інтегрування

В багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дозволяє звести знаходження шуканого інтеграла до табличного.

Приклад . Знайти $\int \sqrt{3x+4}dx$.

Розв’язок. Позначимо $t = 3x+4$. Тоді:

$$\int \sqrt{3x+4}dx = \left| \begin{array}{c} t = 3x+4 \\ dt = \left(3x+4\right)' dx = 3dx \\ \frac{1}{3}dt = dx \end{array} \right| \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{3} \cdot dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{\left(3x+4\right)^3} + C.$$

Приклад . Знайти $\int e^{\sin x} \cos xdx$.

Розв’язок. Позначимо $t = \sin x$. Тоді:

$$\int e^{\sin x}\cos xdx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \left(\sin x\right)' dx = \cos xdx \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$$

Метод інтегрування частинами

Виведемо формулу, яку називають ***формулою інтегрування частинами***.

Нехай u и v – дві функції змінної x, що диференційовані на $[a,b]$.

Оскільки $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, то функція $u \cdot v$ – первісна для суми $u'v + uv'$. Тоді маємо

$$\int (u'v + uv')dx = uv + C \ .$$

$$\int vu'dx + \int uv'dx = uv + C$$

Враховуючи, що $u'dx = du$, $v'dx = dv$, будемо мати

$$\int vdu + \int udv = uv + C .$$

Отже,

$$\int udv = uv - \int vdu + C .$$

Оскільки $\int vdu$ включає довільну сталу, то до неї можна включити і сталу *C*.

Остаточно отримаємо вираз:

$$\int udv = uv - \int vdu ,$$

що називають ***формулою інтегрування частинами***.

За допомогою цієї формули знаходження інтеграла $\int udv$ зводиться к пошуку іншого інтеграла $\int vdu$, який буде або табличним, або подібним початковому, або інтеграла, що знаходиться за допомогою заміни змінної. При цьому за u береться така функція, яка при диференціюванні спрощується, а за dv – та частина підінтегрального виразу, інтеграл від якої відомий або може бути знайдено.

Визначимо **деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегруванням частинами**.

1. Інтеграли вигляду $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin\alpha x dx$, $\int P(x)\cos\alpha x dx$, де $P(x)$ – многочлен, α - число. За u слід прийняти $P(x)$, а за dv – відповідний вираз $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$.
2. Інтеграли вигляду $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)arctgxdx$, $\int P(x)arcctgxdx$. За u приймають відповідно функції $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv – вираз $P(x)dx$.
3. Інтеграли вигляду, $\int e^{\alpha x}\cdot\sin\beta xdx$, $\int e^{\alpha x}\cdot\cos\beta xdx$, де α и β - числа. Не має різниці, що прийняти за u: $e^{ax}dx$, або $\sin\beta x$.

Зауваження. Інтегрування частинами може застосовуватися декілька разів.

Приклад . Знайти $\int x\cos xdx$, користуючись методом інтегрування частинами $\int udv = uv - \int vdu$.

Розв’язок. $\int x\cos xdx = \left\| \begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos xdx \\ v = \int\cos xdx = \sin x \end{array} \right\| = x\cdot\sin x - \int\sin xdx = x\cdot\sin x + \cos x + C$.

Приклад . Знайти $\int(4x+2)\cos 5xdx$, користуючись методом інтегрування частинами $\int udv = uv - \int vdu$.

Розв’язок.

$$\int(4x+2)\cos 5xdx = \left\| \begin{array}{c} u = 4x+2 \\ du = 4dx \\ dv = \cos 5xdx \\ v = \int\cos 5xdx = \frac{1}{5}\sin 5x \end{array} \right\| = (4x+2)\cdot\frac{1}{5}\sin 5x - \int\frac{1}{5}\sin 5x\cdot 4dx = .$$

$$= \frac{4x+2}{5}\sin 5x + \frac{4}{25}\cos 5x + C$$

Приклад . Знайти $\int \ln x dx$.

$$\int \ln x dx = \left\| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \\ v = \int dx = x \end{array} \right\| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

Приклад . Знайти $\int \sin x \cdot e^x dx$.

Розв'язок. $I = \int \sin x \cdot e^x dx = \int \sin x de^x = \sin x \cdot e^x - \int e^x d(\sin x) =$

$= e^x \sin x - \int \cos x \cdot e^x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d(\cos x) =$

$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int \sin x \cdot e^x dx = e^x (\sin x - \cos x) - I$.

Тоді $2I = e^x (\sin x - \cos x)$ або $I = \dfrac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$