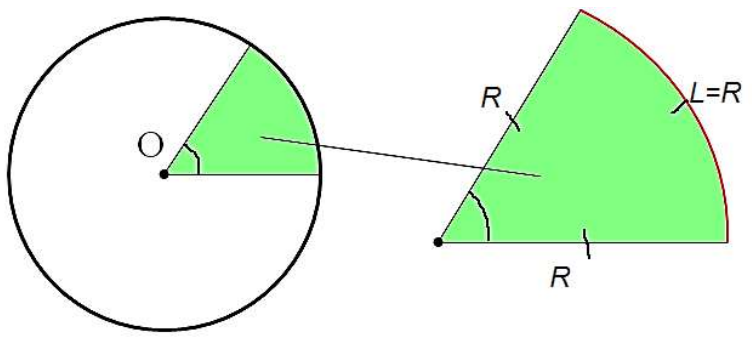
Лекція 1.

Радіанна мера кутів. Тригонометричні функції

Існують різні одиниці вимірювання кутів.

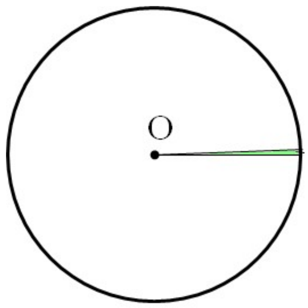
У міжнародній системі одиниць SI використовується спосіб вираження величини кута, при якому кут — безрозмірнісна величина - радіан. При цьому величина кута за означенням дорівнює відношенню довжини дуги L кола з центром у вершині кута і будь-яким радіусом до величини цього радіуса R. Це відношення не залежить від вибору радіуса. Кут величиною 1 радіан визначається як такий, при якому відношення довжини дуги до радіуса дорівнює одиниці, тобто довжина дуги дорівнює радіусу. Саме радіан, як міру величини кута, ми будемо використовувати в курсі вищої математики.



1 радіан, коли $L = R$

Загалом плоский кут вимірюють в градусах, мінутах, секундах.

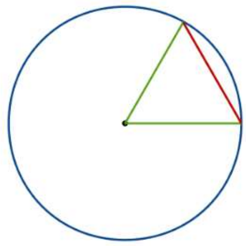
В елементарній геометрії вимірюють кути в градусах транспортиром. Градус - це 1/360 частина кола.



$1^{\circ} = \dfrac{1}{360}$ частина кола

Чому поділили саме на 360? А не на 100, наприклад. Причина вибору градуса як одиниці виміру кутів невідома. Одна з теорій припускає, що це пов'язано з тим, що 360 – приблизну кількість днів в році.

Інша теорія говорить, що вавилоняни поділили коло на 6 частин(використовуючи кут рівностороннього трикутника як базу), кожна з яких ділилася на 60 частин, слідуючи своїй шістдесяткової системи числення.



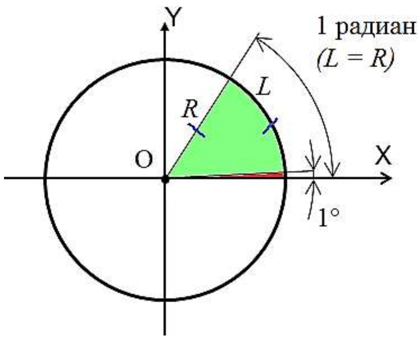
Відповідно до цієї ж шістдесяткової системи числення градус ділять на 60 мінут (від лат. minutus — маленький, дрібний; позначається штрихом x′), а мінуту — на 60 секунд (позначається двома штрихами y″).

Наприклад, кут $\alpha = 42^{\circ}35'12''$.

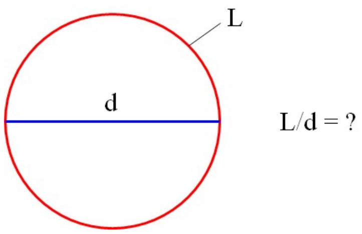
Як співвідносяться між собою градуси і радіани?

Зрозуміло, що градус менше радіана.

Скільки градусів в одному радіані?



Слід нагадати число π. Ще в Давньому Єгипті задавали питання: у скільки разів довжина кола більше її діаметра? Вимірювали різними способами ... Кожен раз виходило трохи більше трьох.



$$\frac{L}{d} \approx 3{,}14$$

Після них математики різних країн продовжували обчислювати це співвідношення аж до 18 століття! Поки в 1767 році Йоганн Ламберт не довів ірраціональність цього числа (тобто остаточно довів, що, як би дрібно ні нарізати окружність на рівні шматочки, з таких шматочків скласти точно довжину діаметра не можна. Принципово не можна. Тільки лише приблизно).

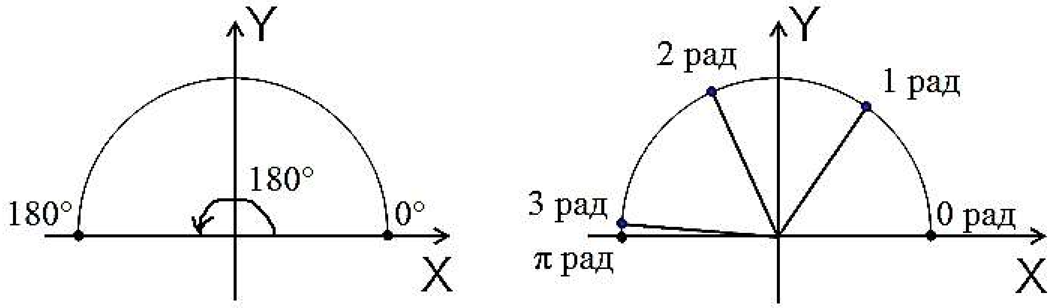
У скільки разів довжина кола більше її діаметра встановили давним-давно. Але, знову ж таки, приблизно ... У 3,1415926 ... рази. Після коми - нескінченне число цифр без жодного порядку, без будь-якої логіки. Це число - і є число π ("пі"). π - математична стала, що дорівнює відношенню довжини кола до її діаметру. $\pi = \frac{L}{d}$. Позначається буквою грецького алфавіту «π».

$$\pi \approx 3{,}1415926...$$

Як було сказано вище $\pi = \dfrac{L}{d}$ або $\pi = \dfrac{L}{2R}$ Значить, довжина кола, виражена через радіус дорівнює $L = 2\pi R$. Половина довжини кола $\dfrac{L}{2} = \pi R$.

Центральному розгорнутому куту, з градусної мірою 180 градусів, відповідає півколо, тобто дуга, довжина якої дорівнює πR.

Один радіан - це центральний кут відповідний дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола. Значить, радіанна міра півкола дорівнює π радіан.



Це дозволяє встановити зв'язок між радіанною і градусною мірою, а саме:

$$\pi_{\text{рад}} = 180^\circ.$$

Звідси $1_{\text{рад}} = \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx \dfrac{180^\circ}{3{,}14} \approx 57{,}325^\circ$ і $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ рад

Із співвідношення $\pi_{\textit{радиан}} = 180^\circ$ можна переводити градуси в радіани і радіани в градуси, складаючи пропорції.

Приклад 1. Перевести в радіани 15°. Складемо пропорцію:

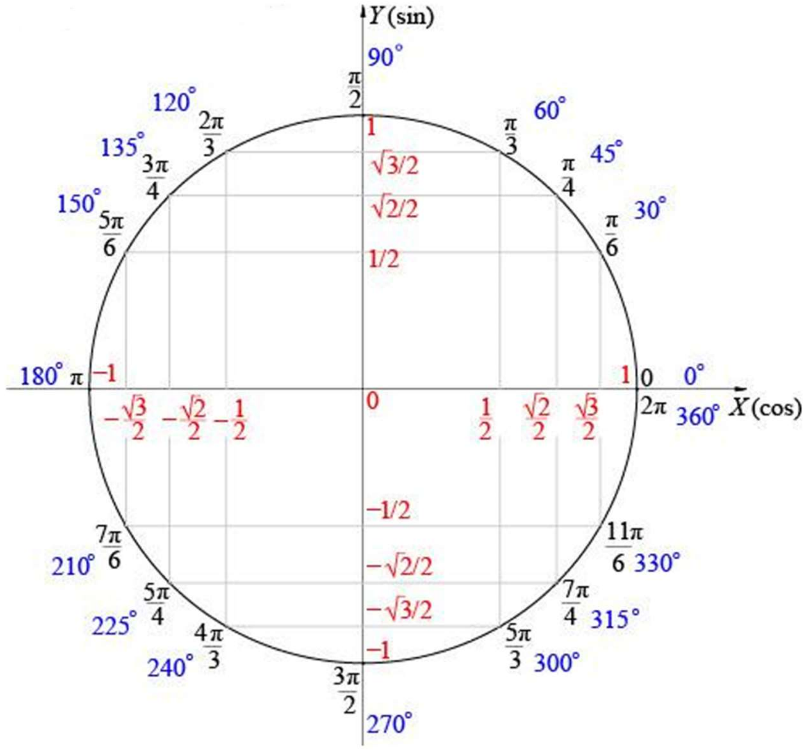
$\pi_{\text{рад}} = 180^\circ$ $x_{\text{рад}} - 15^\circ$	$x = \dfrac{15^\circ \cdot \pi_{\text{рад}}}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{12}$ рад

Приклад 2. Перевести в градуси $\dfrac{5\pi}{6}$ радіан.

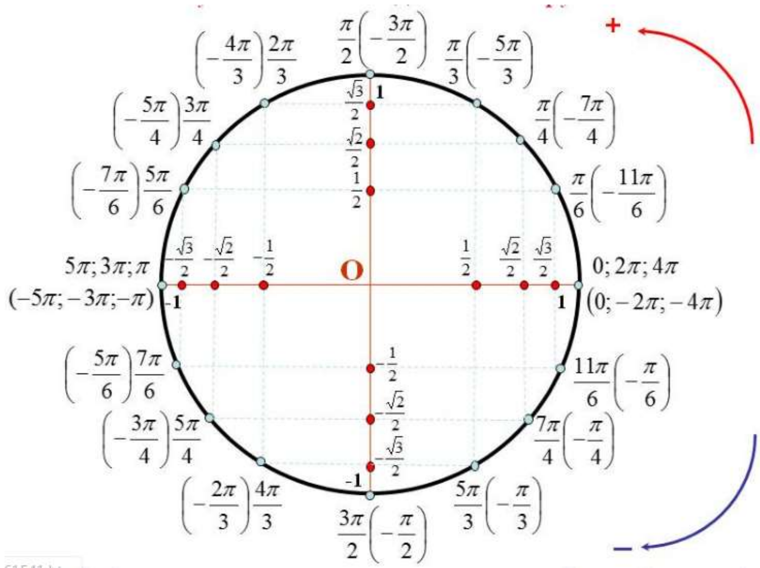
$\pi_{\text{рад}} = 180^\circ$ $\dfrac{5\pi}{6}$ рад - x°	$x = \dfrac{5\pi_{\text{рад}}}{6} \cdot \dfrac{180^\circ \cdot}{\pi_{\text{рад}}} = 150^\circ$

Зауваження. В математиці значок градусів – пишеться. Завжди і скрізь. Наприклад, cos30° - це косинус 30 градусів! А ось значок радіанів ("рад") – не пишеться! Він – мається на увазі. Наприклад, sin5 – це синус п'яти радіанів!

Тепер побудуємо тригонометричний круг, на якому відзначимо основні кути. Під основними кутами розуміють кути в $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ радіан і симетричні їм у всіх координатних чвертях.



Тригонометричний круг, це коло одиничного радіуса. Застосовуючи його легко знаходити значення $\sin x$ і $\cos x$ основних кутів.



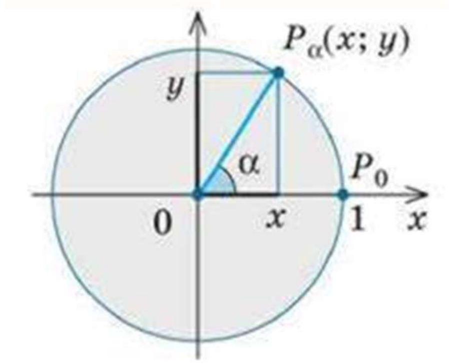
Якщо кути відкладається проти годинникової стрілки, виходять додатні кути.

Якщо кути відкладається за годинниковою стрілкою, виходять від'ємні кути.

Тригонометричні функції

Дамо визначення синуса, косинуса, тангенса і котангенса. Ці функції можна визначати або через прямокутний трикутник, або через одиничне коло. Визначимо через одиничне коло.

Синус та косинус можуть бути описані наступним чином: об'єднавши будь-яку точку $(x; y)$ на одиничному колі з початком координат $(0;0)$, ми отримаємо відрізок, що знаходиться під кутом α відносно додатного напрямку осі абсцис. Тоді:



Синусом кута α називається ордината (y) точки одиничного кола: $\sin\alpha = y$.

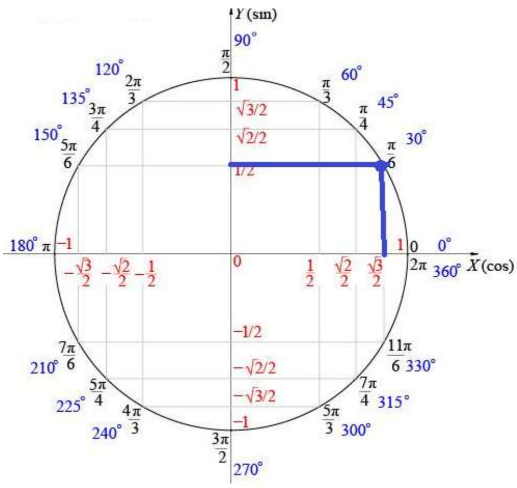
Косинусом кута α називається абсциса (x) точки одиничного кола: $\cos\alpha = x$.

Тангенсом кута α називається відношення ординати точки до її абсциси, тобто $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (де $\cos\alpha \neq 0$).

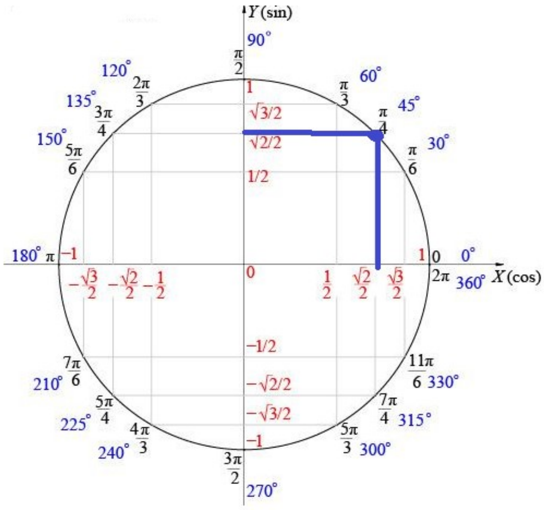
Котангенсом кута α називається відношення абсциси точки до її ординати, тобто $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (где $\sin\alpha \neq 0$).

Для обчислення синуса і косинуса від основних кутів треба пам'ятати зростаючу послідовність з чисел: $0;\ \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 1$.

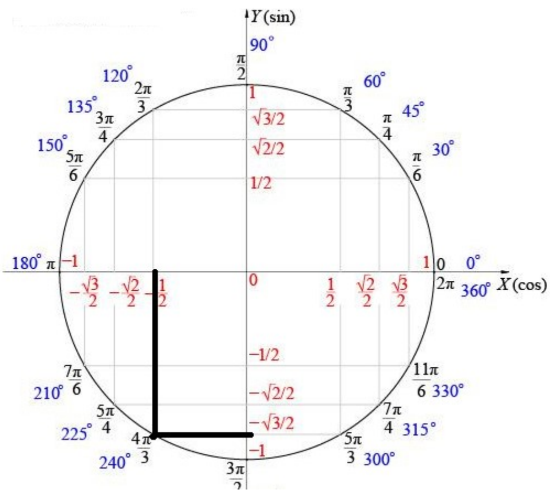
За допомогою тригонометричного кола легко визначати синуси і косинуси основних кутів.



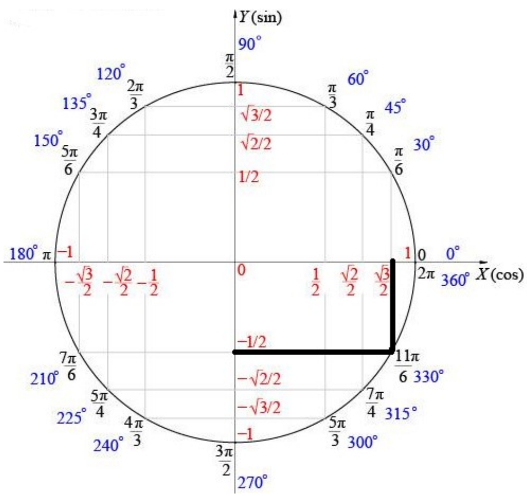
$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$



$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

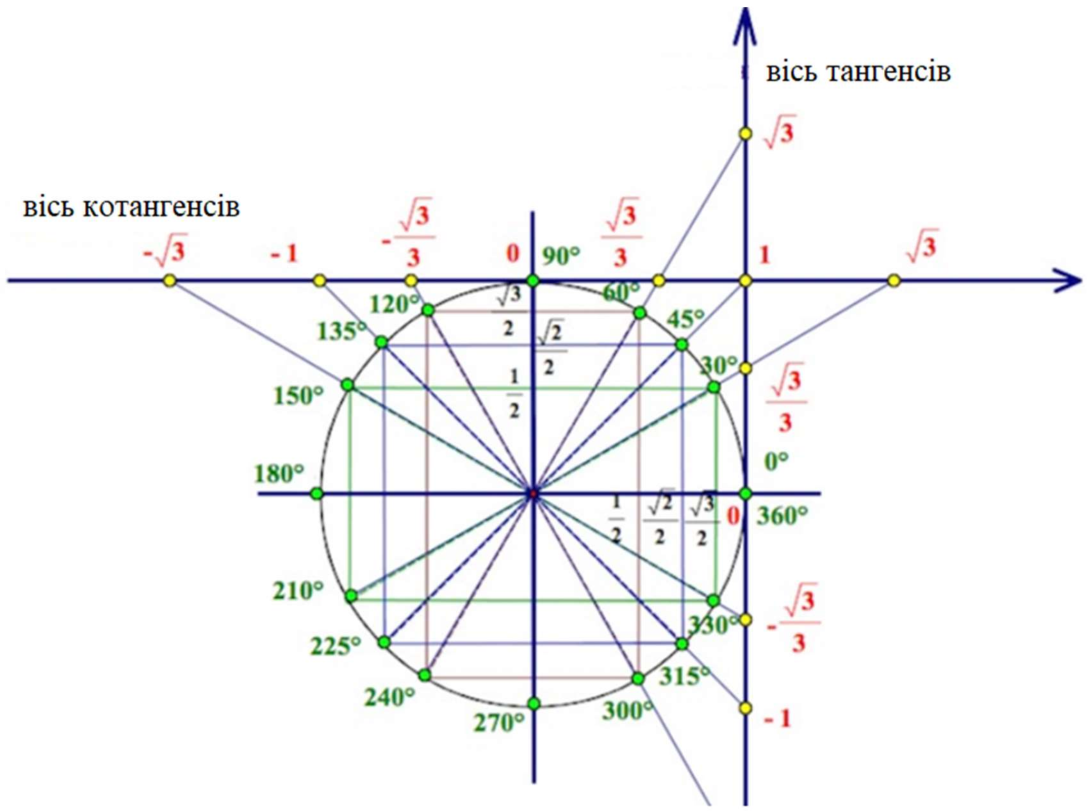


$$\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}\ ,\quad \sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

Значення $tg\alpha$ і $ctg\alpha$ можна знаходити із співвідношень $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ або застосовувати одиничне коло і ряд чисел $0,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ 1,\ \sqrt{3}$.



Зауважимо, що $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Обчислимо : $tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\quad tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\quad ctg\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

За допомогою тригонометричного кола можна визначати значення обернених тригонометричних функцій: $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$. В цих функціях по значенням на осях, знаходимо кут (в радіанах).

При цьому пам'ятаємо, що запис $\arcsin a = \varphi\ \ (|a| \le 1)$, позначає, що $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi = a$.

$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\text{ , тому що }\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},\text{ тому що }\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Запис $\arccos a=\varphi$ ($|a|\le 1$), позначає, що $\varphi\in[0;\pi]$ і $\sin\varphi=a$.

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\text{ тому, що }\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Запис $\mathrm{arc}\,tga=\varphi$ (a - довільне), позначає, що $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $tg\varphi=a$.

$$arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}\text{ тому що }tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}\text{ тому що }tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$$

Значення тригонометричних функцій для деяких кутів

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	0	∞

Загальні відомості про тригонометричні функції

Тригонометричні функції - елементарні функції, які історично виникли при розгляді прямокутних трикутників і виражали залежності довжин сторін цих трикутників від гострих кутів при гіпотенузі (або, що рівнозначно, залежність хорд і висот від центрального кута дуги в колі). Ці функції знайшли широке застосування в самих різних галузях науки. В процесі розвитку математики визначення тригонометричних функцій було розширено, в сучасному розумінні їх аргументом може бути довільне дійсне або комплексне число.

Розділ математики, що вивчає властивості тригонометричних функцій, називається **тригонометрією**.

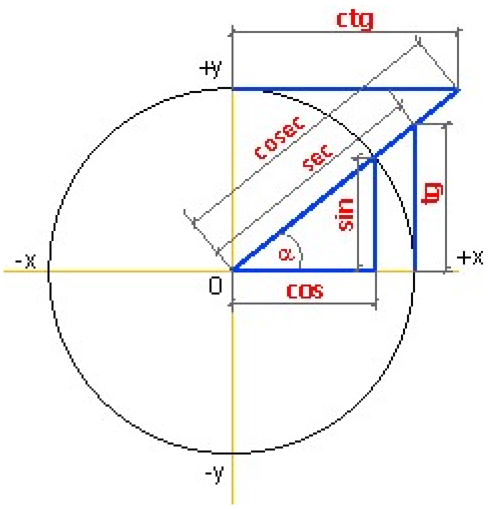
До тригонометричним функціям традиційно відносять:

прямі тригонометричні функції:

- синус - $\sin x$
- косинус - $\cos x$

похідні тригонометричних функцій:

- тангенс $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (в іноземній літературі позначення $\tan x$)
- котангенс $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (в іноземній літературі позначення $\cot x$)
- секанс $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$;
- косеканс $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ (в іноземній літературі позначення $\csc x$)

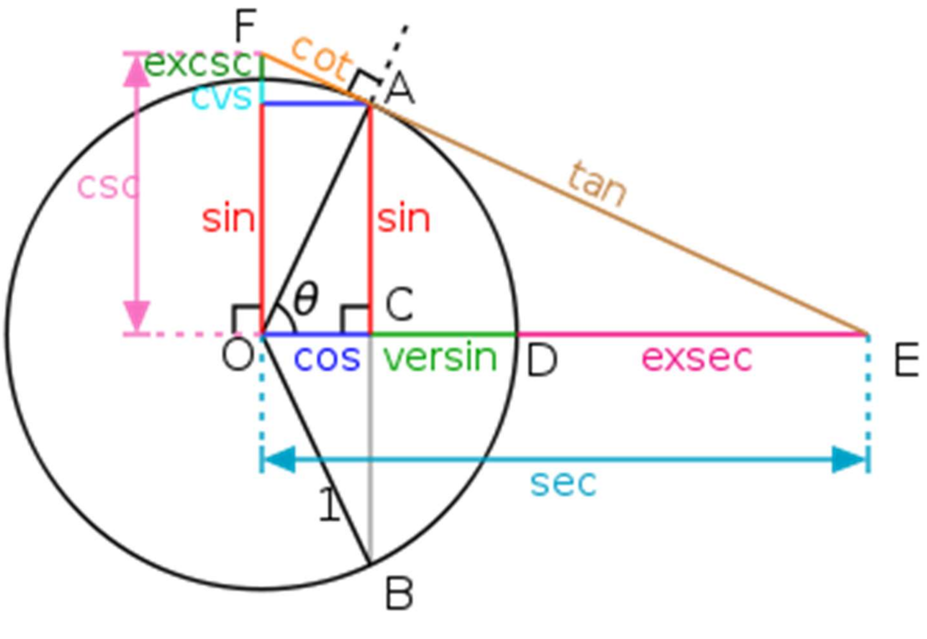


обернені тригонометричні функції:

- арксинус - $\arcsin x$ (в іноземній літературі $\sin^{-1} x$) - кут, синус якого дорівнює x
- арккосинус - $\arccos x$ (в іноземній літературі $\cos^{-1} x$)
- арктангенс - $arctgx$ (в іноземній літературі $\tan^{-1} x$ або $\arctan x$)
- арккотангенс - $arcctgx$ (в іноземній літературі $arc\cot x$)
- арксеканс - $arc\sec x$
- арккосеканс - $arcco\sec x$ (в іноземній літературі $arc\csc x$)

Тригонометричні функції, що дуже рідко використовують:

- Версинус $ver\sin x = 1 - \cos x$ (інші назви: синус-верзус, синус версус).
- коверсинус $ver\cos x = 1 - \sin x$ (інші назви: косинус-верзус , косинус версус).
- Гаверсинус $haver\sin x = \dfrac{ver\sin x}{2}$
- Гаверкосинус $haver\cos x = \dfrac{ver\cos x}{2}$
- Ексеканс $ex\sec x = \sec x - 1$
- Екскосеканс $\mathrm{excsc}x = \mathrm{cosec} - 1$



відрізок CD - версинус, DE - ексеканс.

Застосування

Версинус, коверсиинус і гаверсинус були зручні для розрахунків з використанням логарифмів, оскільки вони всюди невід'ємні, проте в зв'язку з розвитком обчислювальних засобів ця область застосування неактуальна. В даний час ці функції використовуються для опису відповідних сигналів в електроніці (наприклад, в функціональних генераторах). Гаверсинус також сьогодні використовується в навігаційних розрахунках для уникнення помилок округлення в обчислювальних системах з обмеженою розрядністю.