Лекція 1. **Матриці. Дії над матрицями**

Поняття матриці і розділ математики - матрична алгебра - мають велике значення в математиці. Пояснюється це тим, що значна частина математичних моделей явищ і процесів записується в досить простий, а головне - компактній матричній формі.

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпців. Числа, з яких складається матриця, називаються елементами матриці.

Матриці позначаються великими буквами латинського алфавіту, наприклад A, B, C,…, а для позначення елементів матриці використовуються маленькі букви з подвійною індексацією: a_{ij}, де i - номер рядка, j - номер стовпця.

Матриця $A_{m\times n}$ записується у вигляді:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

або у скороченому записі $A = \left(a_{ij}\right)$, де i – номер рядка, j – номер стовпця ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

Наприклад,

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поряд з круглими дужками використовуються квадратні дужки, наприклад:

$$B_{3\times 4} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 6 & 9 \\ 2 & -1 & 7 & -3 \\ 4 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Дві матриці A і B одного розміру називаються **рівними**, якщо рівні їх відповідні елементи, тобто $a_{ij} = b_{ij}$ для будь-яких $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Матриця $A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$, що складається із одного рядка, називається ***матрицею-рядком***.

Матриця $B_{m\times 1}=\begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{21} \\ b_{m1} \end{pmatrix}$, що складається з одного стовпця, називається ***матрицею-стовпцем***.

Матрицю-рядок і матрицю-стовпець називають ***вектором***.

Матриця називається ***квадратною*** порядку n, якщо число її рядків дорівнює числу стовпців і дорівнює n.

Наприклад, $A_{3\times 3}=\begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 3 & -8 & 7 \\ -9 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ – квадратна матриця третього порядку.

Елементи матриці a_{ij}, в яких номер стовпця дорівнює номеру рядка $(i=j)$, називаються **діагональними**. Діагональні елементи утворюють головну діагональ матриці. Для квадратної матриці головну діагональ утворюють елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Елементи $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)} \dots a_{n1}$ квадратної матриці утворюють побічну діагональ.

Квадратна матриця називається **трикутною**, якщо усі елементи, що розташовані по одну сторону від головної діагоналі, дорівнюють нулю. Розрізняють верхню трикутну матрицю і нижню трикутну матрицю.

$$A_{3\times 3}=\begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 0 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B_{3\times 3}=\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ -9 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Якщо всі недіагональні елементи квадратної матриці дорівнюють нулю, то матриця називається ***діагональною***.

Наприклад, $A_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця третього порядку.

Якщо в діагональної матриці n-го порядку всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, то матриця називається ***одиничною*** матрицею n-го порядку і позначається буквою E.

Наприклад, $E_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця третього порядку.

Матриця будь-якого розміру називається ***нульовою*** або нулем-матрицею, якщо всі її елементи дорівнюють нулю:

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Операції над матрицями

Над матрицями, як і над числами, можна виконувати ряд операцій, причому деякі з них аналогічні операціям над числами, а деякі - специфічні.

Для матриць визначені наступні операції:

1. Множення матриці на число.
2. Додавання матриць.
3. Віднімання матриць.
4. Множення матриць.
5. Піднесення матриці до цілого додатного степеня.
6. Транспонування матриці

1. Множення матриці на число.

Добутком матриці на число (або числа на матрицю) називається матриця, елементами якої є добутки елементів даної матриці на це число.

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, то $4A=\begin{pmatrix} -20 & 24 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$.

Зауваження. Загальний множник усіх елементів можна виносити за знак матриці. Наприклад, $\begin{pmatrix} 10 & -8 & 12 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Зокрема, добуток матриці A на число 0 є нульова матриця, тобто $0\cdot A=\mathbf{0}$.

2. Додавання матриць.

Примітка. Операція додавання визначена лише для матриць однакового розміру.

Сумою двох матриць *A* ***і*** *B однакового розміру $m\times n$ називається матриця $C_{m\times n}=A+B$, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць, тобто $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для усіх $i=1,2\ \dots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n$.*

Наприклад, $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \ .$

$C=A+B=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

В окремому випадку $A+\mathbf{0}=A$.

2. Віднімання матриць.

Зауваження. Операція віднімання визначена лише для матриць однакового розміру.

Різницею двох матриць однакових розмірів називається матриця того самого розміру, елементи якої дорівнюють різницям відповідних елементів матриць.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix},$

$C=A-B=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Мають місце такі **властивості** вищеназваних операцій над матрицями:

Позначимо A,B,C - матриці, α,β - числа.

1) $A+B=B+A$
2) $\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$
3) $\alpha\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B$
4) $\left(\alpha+\beta\right)\cdot A=\alpha A+\beta A$
5) $\alpha\cdot\left(\beta A\right)=\left(\alpha\beta\right)\cdot A$

4. Множення матриць.

Примітка. Операція множення матриці A на матрицю B визначена лише тоді, коли число стовпців першої матриці A дорівнює числу рядків другої матриці B (тобто матриці мають бути узгодженими).

Наприклад, $A_{3\times5}\cdot B_{5\times2}$ - узгоджені матриці, $A_{3\times5}\cdot M_{4\times2}$ - неузгоджені.

Добутком двох узгоджених матриць $A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}$ *називається матриця* $C_{m\times n}$, *кожний елемент якої* c_{ij} *дорівнює сумі добутків елементів* i*-го рядка матриці* A *на відповідні елементи* j*-го стовпця матриці* B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}b_{pj},\ i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n.$$

Тобто для того, щоб отримати елемент c_{ij} матриці $C = AB$, треба елементи i-го рядка матриці A помножити на відповідні елементи j- го стовпця матриці B і отримані добутки додати.

Приклад 1. Знайти добуток матриць $A \cdot B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1. Знайдемо розмір матриці-добутка (якщо матриці узгоджені): $A_{2\times3} \cdot B_{3\times3} = C_{2\times3}$.

2. Обчислимо елементи матриці C, умножаючи елементи кожного рядка матриці A на відповідні елементи стовпців матриці B. Таким чином:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 2(-2) \qquad c_{12} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \qquad c_{13} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1$$

$$c_{21} = 3(-1) + 1 \cdot 5 + 0(-2) \qquad c_{22} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \qquad c_{23} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1$$

Отримуємо $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Знайти добутки матриць $A \cdot B$ и $B \cdot A$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1. Знайдемо розмір матриці-добутка $A \cdot B$ (якщо матриці узгоджені): $A_{2\times3} \cdot B_{2\times2}$. Добуток $A \cdot B$ не існує, тому що кількість стовпців матриці A не дорівнює числу рядків матриці B (матриці неузгоджені).

2. Знайдемо розмір матриці-добутка $B \cdot A$ (якщо матриці узгоджені): $B_{2\times2} \cdot A_{2\times3} = K_{2\times3}$.

3. Обчислимо елементи матриці-добутка K, умножаючи елементи кожного рядка матриці B на відповідні елементи стовпців матриці A. Таким чином:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$K_{2\times3} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Отримуємо $C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Зауваження. Операція множення матриць має відмінності від множення чисел:

а) Якщо добуток матриць AB існує, то після перестановки співмножників місцями добуток матриць BA може і не існувати.

б) Якщо навіть добутки AB і BA існують, то вони можуть бути матрицями різних розмірів.

в) У разі, коли обидва добутки AB і BA існують і обидва – матриці однакового розміру (це можливо лише при множенні квадратних матриць одного порядку), комутативний (переставний) закон множення в більшості випадків не виконується.

г) Добуток двох ненульових матриць може дорівнювати нульовій матриці, тобто з того, що $A \cdot B = 0$, не витікає, що $A = 0$, або $B = 0$. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Приклад 3. Знайти добутки матриць $A \cdot B$ і $B \cdot A$, де:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. $A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = C_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$;

$$B_{3\times2} \cdot A_{2\times3} = D_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тобто } AB \neq BA.$$

Приклад 4. Знайти добутки матриць $A \cdot B$ і $B \cdot A$, де:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$AB = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}; \text{ тобто } AB \neq BA.$$

В окремому випадку комутативний закон виконується для добутку будь-якої квадратної матриці A $n-$го порядку на одиничну матрицю E того ж порядку, причому цей добуток дорівнює A:

$$AE = EA = A$$

$$A_{n\times n}\cdot E_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}=A.$$

$$E_{n\times n}\cdot A_{n\times n}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\mathrm{A}.$$

Таким чином, одинична матриця при множенні матриць грає ту ж роль, що і число 1 при множенні чисел.

Зауваження. Оскільки в загальному випадку $AB \neq BA$, завжди треба строго стежити за порядком множників. Матриці, для яких виконується рівність $AB = BA$, називаються перестановочними.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Цікаві властивості мають так звані матриці переставлення. Наприклад,

$$A\cdot P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A\cdot P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Піднесення до цілого додатного степеня.

Піднесення до степеня m відповідає m - кратному множенню.

Цілим додатним степенем m квадратної матриці A - A^m $\left(m>1\right)$ називається добуток m матриць, рівних A, тобто:

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{m\ раз}$$

Примітка. Операція піднесення до степеня визначається лише для квадратних матриць.

За визначенням вважають $A^0 = E$.

Степені матриць мають властивості:

$$A^1 = A$$
$$A^m \cdot A^k = A^{m+k},$$
$$\left(A^m\right)^k = A^{mk}.$$

Приклад 5. Знайти A^2, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Розв’язання.

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}.$$

Звертаємо увагу на те, що з рівності $A^m = 0$ ще не виходить, що матриця $A = 0$. Наприклад:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} \quad A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

6. Транспонування матриці

Транспонування матриці – це перехід від матриці A до матриці A^T, в якій рядки і стовпці помінялися місцями із збереженням порядку. Матриця A^T називається транспонованою відносно матриці A :

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}, A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Якщо матриця A має розмір $m \times n$, то транспонована матриця A^T має розмір $n \times m$.

Наприклад, $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $\quad A^T{}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Властивості операції транспонування:

$$1)\left(A^T\right)^T = A$$

$$2)\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T$$

$$3)\left(A + B\right)^T = A^T + B^T$$

$$4)\left(AB\right)^T = B^T A^T$$