Лекція 20

Екстремум функції двох змінних

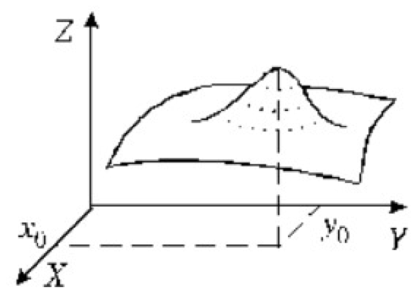
Поняття максимуму, мінімуму, екстремуму функції двох змінних аналогічні відповідним поняттям функції однієї незалежної змінної.

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в деякій області D, точка $M_0(x_0; y_0) \in D$.

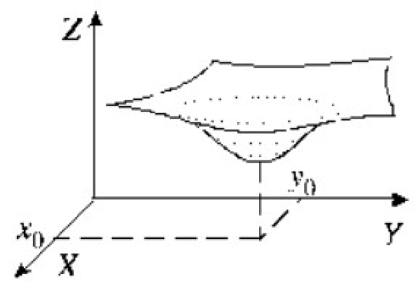
Означення. Функція $z = f(x; y)$ має **максимум** в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо існує такий δ- окіл точки $M_0(x_0; y_0)$, що для кожної точки $M(x; y)$, що відрізняється від точки $M_0(x_0; y_0)$, з цього околу виконується нерівність $f(x_0, y_0) > f(x, y)$.

Означення. Функція $z = f(x; y)$ має **мінімум** в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо існує такий δ- окіл точки $M_0(x_0; y_0)$, що для кожної точки $M(x; y)$, що відрізняється від точки $M_0(x_0; y_0)$, з цього околу виконується нерівність $f(x_0, y_0) < f(x, y)$.

Означення. Мінімум і максимум функції називаються ***екстремумами*** функції. Точка M_0 в який функція має екстремум, називається *точкою екстремуму*.

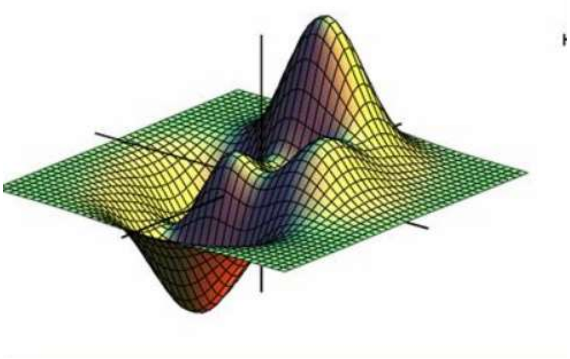


$M_0(x_0; y_0)$ - точка максимуму



$M_0(x_0; y_0)$ - точка мінімуму

Зауваження. Відзначимо, що, в силу означення, точка екстремуму функції лежить всередині області визначення функції; максимум і мінімум мають локальний (місцевий) характер: значення функції в точці $M_0(x_0; y_0)$ порівнюється з її значеннями в точках, досить близьких до $M_0(x_0; y_0)$. В області D функція може мати кілька екстремумів або не мати жодного.



Функція, що має декілька екстремумів в області визначення.

Сформулюємо необхідну умову екстремуму.

Теорема 1 (необхідна умова існування локального екстремуму). *Якщо диференційована функція $z = f(x; y)$ має локальний екстремум в точці $M_0(x_0; y_0)$, то в цій точці частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю,нескінченності або не існують.*

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

Геометрично рівності (1) позначають, що в точці $M_0(x_0; y_0)$ екстремуму функції $z = f(x; y)$ дотична площина до поверхні, що зображує функцію $z = f(x; y)$, паралельна площині Oxy.

Означення. Точки, в яких частинні похідні першого порядку функції $z = f(x; y)$ дорівнюють нулю, називаються ***стаціонарними точками*** функції *z.*

Означення. Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю або не існують називаються *критичними* точками функції $z = f(x; y)$.

Зауваження. Функція може мати екстремум в точках, де одна або декілька або усі з частинних похідних не існують.

Приміром, дослідімо функцію $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Функція $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ має максимум у точці $(0;0)$, оскільки $f(0,0) = 1, f(x,y) < 1$, якщо $x^2 + y^2 > 0$.

Частинні похідні функції $f(x,y)$

$$f'_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f'_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

у точці $(0;0)$ не існують.

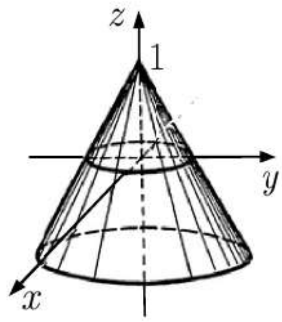
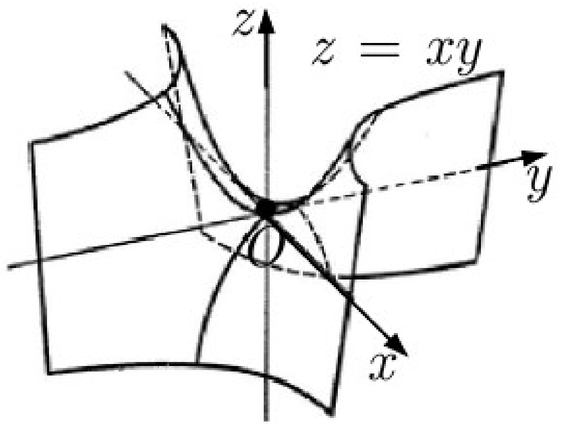


Рис. У точці $(0;0;1)$ похідні не існують

Зауваження. Не всяка критична точка є точкою екстремуму, тобто теорема 1 встановлює лише необхідну, але не достатню умови екстремуму.

Приміром, дослідимо функцію $z = xy$. Частинні похідні функції $z = xy$ дорівнюють нулеві в точці $(0;0)$. Але ця функція у вказаній точці екстремуму не має, тому що в досить малому околі точки $(0;0)$ вона набуває як додатних, так і від'ємних значень. Графіком функції $z = xy$ є гіперболічний параболоїд.



Точка O є сідловою точкою поверхні.

Умова $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$ не є достатньою для дослідження питання про екстремальні значення функції, але дозволяє знаходити ці значення в тих випадках, коли заздалегідь відомо про існування мінімуму або максимуму. В іншому випадку необхідно додаткове дослідження за допомогою достатньої умови існування екстремуму.

Теорема 2 (**достатні умови екстремуму функції двох змінних**).

Нехай $M_0\left(x_0; y_0\right)$– стаціонарна точка функції $z = f\left(x; y\right)$, тобто $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$. В деякому околі точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$ функція має неперервні частинні похідні другого порядку. Введемо позначення: $A = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \; B = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \; C = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y^2}$ і складемо дискримінант $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тоді:

- якщо $\Delta > 0$, то функція $z = f\left(x; y\right)$ має в точці $M_0\left(x_0; y_0\right)$ екстремум, зокрема максимум при $A < 0$ (або $C < 0$) і мінімум при $A > 0$ (або $C > 0$).
- якщо $\Delta < 0$, то функція $z = f\left(x; y\right)$ в точці $M_0\left(x_0; y_0\right)$ екстремуму не має.
- якщо $\Delta = 0$, то екстремум може бути, а може не бути (необхідне додаткове дослідження).

Приклад 1. Знайти екстремуми функції $z = xy$.

Розв'язок.

1. Знайдемо область визначення функції.

Областю визначення заданої функції є вся площина xOy.

2. Знайдемо стаціонарні точки функції.

Знаходимо частинні похідні першого порядку функції z.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(xy\right)'_x=y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(xy\right)'_y=x.$$

Прирівнюючи нулю ці похідні, отримуємо систему для визначення стаціонарних точок.

$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}$. Маємо одну стаціонарну точку $M\left(0;0\right)$

3. Знайдемо частинні похідні другого порядку.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(y\right)'_x=0;\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(y\right)'_y=1,\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(x\right)'_y=0.$$

4. Складемо дискримінант $\Delta(x,y)$

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2\qquad \Delta=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot 0-1^2=-1<0.$$

Оскільки дискримінант менше нуля, функція не має екстремуму.

Приклад 2. Знайти екстремуми функції $z=x^3+y^3-15xy+2$.

Розв’язок.

1. Знайдемо область визначення функції.

Областю визначення заданої функції є вся площина xOy.

2. Знайдемо стаціонарні точки функції.

Знаходимо частинні похідні першого порядку функції z.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^3+y^3-15xy+2\right)'_x=3x^2-15y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^3+y^3-15xy+2\right)'_y=3y^2-15x.$$

Прирівнюючи нулю ці похідні, отримуємо систему для визначення стаціонарних точок.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-15y=0\\ 3y^2-15x=0\end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь маємо дві стаціонарні точки $M_1(0;0)$ і $M_2(5;5)$.

3. Знайдемо частинні похідні другого порядку.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(3x^2-15y\right)'_x=6x;\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(3x^2-15y\right)'_y=-15,$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(3y^2-15x\right)'_y=6y.$$

4. Складемо дискримінант $\Delta(x,y)$

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2\qquad \Delta=\begin{vmatrix}6x & -15\\ -15 & 6y\end{vmatrix}=36xy-225.$$

5. Дослідимо стаціонарну точку $M_1(0;0)$.

Обчислимо $\Delta(M_1)=36xy-225=36\cdot 0\cdot 0-225=-225<0$. Згідно з теоремою щодо достатньої умови екстремуму, в точці M_1 екстремуму немає.

6. Дослідить стаціонарну точку $M_2(5;5)$.

Обчислимо $\Delta(M_2)=36xy-225=36\cdot 5\cdot 5-225=675>0$. Згідно з теоремою щодо достатньої умови екстремуму, точка M_2 є точкою екстремуму. $A=6\cdot x=6\cdot 5=30>0$. Отже точка M_2 є точкою мінімуму.

7. Обчислимо значення функції в точці екстремуму:

Обчислимо значення функції z у точці M_2. В результаті маємо $z_{\min}=z(M_2)=z(5;5)=x^3+y^3-15xy+2=5^3+5^3-15\cdot 5\cdot 5+2=-123$.