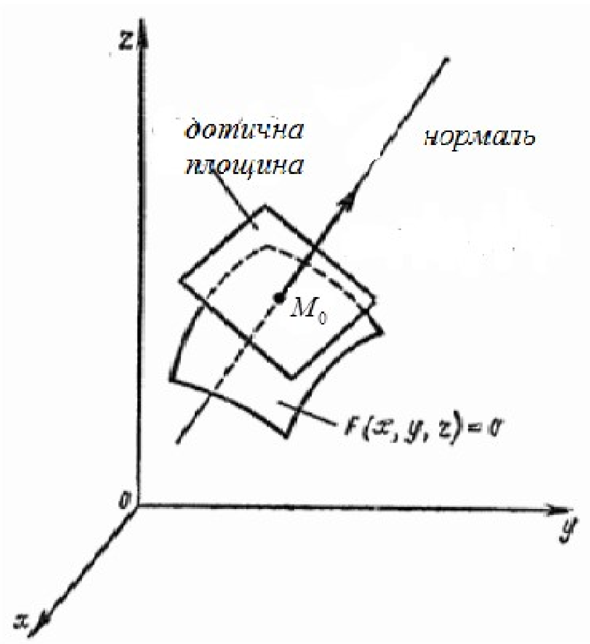
Лекція 19.

Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних

Дотична площина та нормаль до поверхні.

Означення. ***Дотичною*** площиною до поверхні в точці M_0 називається площина, в якій лежать усі дотичні, проведені в точці M_0 до всіх можливих кривих, що лежать на поверхні і проходять через точку M_0.

Означення. ***Нормаллю*** до поверхні в точці M_0 називається пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно дотичній площині в цій точці.



Якщо поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то **рівняння дотичної площини** в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ є

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

А **рівняння нормалі**:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, то **рівняння дотичної площини** в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормалі -

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Приклад 1. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S: x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ у точці $M(1;2;-1)$.

Поверхня S задана в неявному вигляді $F(x,y,z)=0$. Рівняння дотичної площини P і нормалі N у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ знаходять за формулами

$$P: F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0,$$

$$N: \frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Знайдемо усі необхідні частинні похідні і обчислимо їхні значення в точці $M(1;2;-1)$:

$$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+xyz-6.$$

$$F'_x=3x^2+yz;\ F'_x(M)=3-2=1.$$

$$F'_y=3y^2+xz;\ F'_y(M)=3\cdot 4-1=11.$$

$$F'_z=3z^2+xy;\ F'_z(M)=3+2=5.$$

Підставимо отримані числові значення частинних похідних і координати точки M у формули для дотичної і нормалі.

Рівняння дотичної площини:

$1\cdot(x-1)+11\cdot(y-2)+5\cdot(z+1)=0$ або $x+11y+5z-18=0$.

Рівняння нормалі: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+1}{5}$.

Приклад 2. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $S: z=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)$ в точці $M(3;1;4)$.

Оскільки рівняння поверхні S задано в явному вигляді $z=f(x,y)$, то рівняння дотичної площини P і нормалі N до поверхні S у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ знаходять за формулами

$$P: z'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-1(z-z_0)=0.$$

$$N: \frac{x-x_0}{z'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Знайдемо частинні похідні заданої функції і обчислимо їхні значення в точці M_0.

$$z'_x=x;\qquad z'_x(M_0)=3.$$

$z'_y = -y$; $z'_y(M_0) = -1$.

Підставимо отримані числові значення частинних похідних у формули для дотичної і нормалі. Рівняння дотичної площини:

$3 \cdot (x-3) - 1 \cdot (y-1) - 1 \cdot (z-4) = 0$ або $3x - y - z - 4 = 0$.

Рівняння нормалі: $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-4}{-1}$.

Зауваження. У деяких точках поверхні (вони називаються особливими) **може не існувати дотичної площини**. У таких точках дотичні можуть не лежати в одній площині. Наприклад, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ – конічна поверхня. Вершина її є особливою точкою. Дотичні до конічної поверхні в цій точці не лежать в одній площині (вони самі утворюють конічну поверхню).

Диференціювання складних функцій.

Нехай задано функцію $z = f(u,v)$ двох проміжних змінних u і v, які теж є функціями двох змінних x і y, тобто $z = f(u,v),\ u = u(x,y),\ v = v(x,y)$. У цьому випадку частинні похідні знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні складеної функції $z = u^v$,

де $u = \ln(x-y)$, $v = e^{\frac{x}{y}}$.

У цьому випадку частинні похідні знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Потрібно знайти похідні від функції z за проміжними змінними u і v і частинні похідні від функцій u і v за незалежними змінними x і y.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v \cdot u^{v-1} \ (u^v \text{ – степенева функція});$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = u^v \cdot \ln u \ (u^v \text{ – показникова функція});$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x-y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x-y} = \frac{1}{y-x};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \cdot (-\frac{x}{y^2}).$$

Підставимо отримані частинні похідні у формули

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{1}{x-y} + u^v \cdot \ln u \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{1}{y-x} + u^v \cdot \ln u \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot (-\frac{x}{y^2}).$$

Повна похідна

Нехай задано функцію двох проміжних змінних u і v, які є функціями незалежної змінної x, фактично z є функцією однієї змінної x: $z = f(u,v)$, $u = u(x)$, $v = v(x)$. Похідна такої складеної функції називається повною і обчислюється за формулою.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Приклад 4. Знайти повну похідну функції $z = u^2 \cdot e^v$, де $u = \sin x$, $v = \cos x$.

Похідна такої складеної функції обчислюється за формулою.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Потрібно знайти похідні від функції z за проміжними змінними u і v і похідні від функцій u і v за незалежною змінною x.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2u\cdot e^{v};\ \frac{\partial z}{\partial v}=u^{2}\cdot e^{v};$$

$$\frac{du}{dx}=\cos x;\ \frac{dv}{dx}=-\sin x.$$

Підставимо отримані частинні похідні у формулу повної похідної.

$$\frac{dz}{dx}=2u\cdot e^{v}\cdot\cos x-u^{2}\cdot e^{v}\cdot\sin x=u\cdot e^{v}\left(2\cos x-u\cdot\sin x\right).$$

Зауваження. Шукану похідну можна знайти **іншим способом**. Спочатку підставити у функцію z замість проміжних змінних u і v їхні вирази через змінну x, а потім знайти похідну добутку складених функцій однієї змінної $z=\sin^{2}x\cdot e^{\cos x}$.

ІІ-й спосіб

1) $z=u^{2}\cdot e^{v}=\begin{vmatrix}u=\sin x,\\ v=\cos x\end{vmatrix}=\sin^{2}x\cdot e^{\cos x};$

2) $z'_{x}=2\sin x\cdot\cos x\cdot e^{\cos x}+\sin^{2}x\cdot e^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\right)=\sin x\cdot e^{\cos x}\left(2\cos x-\sin^{2}x\right).$