Лекція 18.

Формула Тейлора

Означення. Якщо функція $f(x)$ диференційована $n+1$ разів у деякому замкненому інтервалі, що містить точку x_0, то вона може бути подана у вигляді многочлена n-го степеня і деякого залишкового члена $R_n(x)$. Тоді справедлива **формула Тейлора:**

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

де $R_n(x)$ - залишковий член.

Залишковий член у формі Лагранжа має вигляд:

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$, де c лежить між точками x і x_0, тобто $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

Поклавши у формулі Тейлора $x_0=0$, отримаємо формулу **Маклорена.**

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

де $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$.

Приклад 1. Многочлен $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$ розкласти за цілими додатними степенями бінома $(x+1)$.

Розв’язування прикладу

Многочлен має похідні будь-якого порядку в будь-якій точці. Отже, заданий многочлен можна подати у вигляді многочленна за степенями $(x+1)$ за допомогою формули Тейлора.

Оскільки нас цікавить розклад за степенями бінома $(x+1)$, то для нашого прикладу $x - x_0 = x - (-1) = x + 1 \Rightarrow x_0 = -1$. Обчислимо значення заданого многочлена і його ненульових похідних у точці $x_0 = -1$.

$f(-1) = (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 1 = 1$,

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4$, $\quad f'(-1) = 4$,

$f''(x) = 12x^2 + 12x - 6$, $\quad f''(-1) = -6$,

$f'''(x) = 24x + 12$, $\quad f'''(-1) = -12$,

$f^{(4)}(x) = 24$, $\quad f^{(4)}(x) = 24$,

$f^{(5)}(x)$ і всі наступні похідні дорівнюють нулю. Тому остача $R_5(x) = 0$. Підставимо знайдені значення многочлена та його похідних у точці $x_0 = -1$ у формулу Тейлора.

$f(x) = 1 + \frac{4}{1!}(x+1) - \frac{6}{2!}(x+1)^2 - \frac{12}{3!}(x+1)^3 + \frac{24}{4!}(x+1)^4$ або

$f(x) = 1 + 4(x+1) - 3(x+1)^2 - 2(x+1)^3 + (x+1)^4$ – це і є шуканий розклад заданого многочлена за степенями бінома $(x+1)$.

Зауваження. Формула Тейлора і формула Маклорена широко застосовуються при обчисленні значень функції з заданою точністю.

Приклад 2. Обчислити значення $\sqrt[5]{33}$ з точністю до 0,001.

Розв'язування прикладу

Раніше було розглянуто спосіб наближеного обчислення значення функції за допомогою диференціала: $f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx$.

Зараз розглянемо ще один спосіб наближеного обчислення значення функції, а саме за допомогою формул Маклорена.

Суть способу така:

1) записуємо розклад Маклорена для заданої функції із залишковим членом у формі Лагранжа;

2) далі вирішуємо, скількома членами розкладу потрібно обмежитись, щоб мати задану точність обчислення.

При цьому, чим більшу кількість членів розкладу збережемо, тим з більшою точністю обчислимо значення функції.

Запишімо заданий корінь у вигляді

$$\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32+1} = \sqrt[5]{32\left(1+\frac{1}{32}\right)} = 2\cdot\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Скористаємося біноміальним розкладом

$$(1+x)^m = 1+\sum_{k=1}^{m}\frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}\cdot x^k + R_k =$$

$$= 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m\cdot(m-1)}{2!}\cdot x^2+...+\frac{m(m-k+1)}{(k)!}\cdot x^k + R_k.$$

Із загального біноміального розкладу випливає наближена рівність

$(1+x)^m \approx 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m\cdot(m-1)}{2!}\cdot x^2+...+\frac{m(m-k+1)}{(k)!}\cdot x^k$, похибка якої

$R_k = \frac{m(m-1)...(m-k)}{(k+1)!}\cdot x^{k+1}\cdot(1+\theta x)^{m-k-1}$ (залишковий член у формі Лагранжа) – може бути зроблена як завгодно малою при $|x|<1$ і достатньо великому n.

Запишімо формулу Маклорена для заданого числа. Поклавши $x=\frac{1}{32}$ і $m=\frac{1}{5}$, отримаємо

$$\sqrt[5]{33} = 2\cdot\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = 2(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}+\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{32^2}+$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{9}{5}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{32^3}+..+R_n) =$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{160}-\frac{1}{12800}+\frac{3}{2048000}+R_n\right) = 2(1+0{,}00625-0{,}0000781+...).$$

Отже, щоб мати задану точність обчислення (необхідно обчислити з точністю до 0,001), достатньо обмежитися двома членами розкладу, тобто $\sqrt[5]{33} \approx 2(1+0{,}00625) = 2{,}012$.