

Лекція 18

Диференціювання функції багатьох змінних

Частинні похідні функції двох змінних

На попередній лекції дали означення частинних похідних:

О

з

н

а Аналогічно, *частинна похідна за змінною y* функції $z = f(x; y)$

ч визначається як границя $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$.

е

н

н

я Таким чином, частинна похідна функції кількох (двох, трьох і більше) змінних визначається як похідна функції однієї з цих змінних за умови сталості значень інших незалежних змінних.

а

с

Приклад . Знайти частинні похідні функції $z = 4x^2 + 8y^4 - 10xy$

и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (4x^2 + 8y^4 - 10xy)'_x = 4 \cdot 2x + 0 - 10y \cdot 1 = 8x - 10y$$

н

н

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (4x^2 + 8y^4 - 10xy)'_y = 0 + 8 \cdot 4y^3 - 10x \cdot 1 = 32y^3 - 10x$$

ю

п

о

Повний диференціал функції багатьох змінних

х

і

д

н

Повним диференціалом функції $z = f(x; y)$ в точці M_0 називається головна частина повного приросту функції $z = f(x; y)$, лінійна відносно приростів аргументів. Повний диференціал обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Для функції n змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ маємо формулу

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Частинні похідні другого порядку

Н

е
х
а
й

Для похідних другого порядку застосовують наступні позначення:

Л
я

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$ – функція диференціюється послідовно два рази по x ;

ф

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$ – функція диференціюється послідовно два рази по y ;

У
н

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$ – функція диференціюється спочатку по x , а результат

к

потім диференціюється по y ;

ц
і

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$ – функція диференціюється спочатку по y , а результат

ї

потім диференціюється по x .

$z = f(x; y)$

Останні дві похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають **мішаними**.

визначені частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, які, в загальному випадку також є функціями

змінних x і y . Отже, від цих функцій можна знову знайти частинні похідні як за

Теорема. Якщо частинні похідні другого порядку неперервні, то мішані похідні рівні між собою за умови їх неперервності:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1)'_x = 4x^3 - 4xy^3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1)'_y = -6x^2y^2 + 5y^4.$$

Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 - 4xy^3)'_x = 12x^2 - 4y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_y = -12x^2y + 20y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_x = -12xy^2.$$

Диференціали вищих порядків

Диференціал 2-го порядку функції $z = f(x, y)$ означають формулою

$$\boxed{d^2z = d(dz)}.$$

Якщо функція f має неперервні частинні похідні і змінні x та y незалежні, то

$$\begin{aligned}d^2z &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)'_y dy = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z.\end{aligned}$$

У разі незалежних змінних x та y для *диференціала m -го порядку* функції z , який означають рівністю

$$\boxed{d^m z = d(d^{m-1} z)},$$

маємо аналогічну формулу:

$$\boxed{d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^m z,}$$

Похідна за напрямом

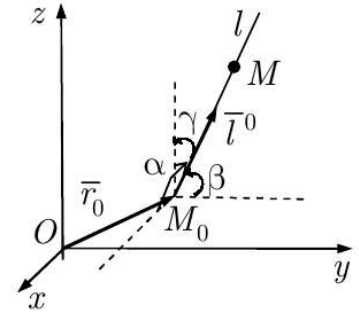
Будь-який напрям l у просторі можна задати одиничним вектором

$$\vec{l}^0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix},$$

де α, β, γ — кути, утворені напрямом l з осями Ox, Oy і Oz .

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ означена в деякому околі точки M_0 з радіусом вектором

$$\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}.$$



Похідною функції $u = f(x, y, z)$ за даним напрямом \vec{l} в точці M_0

називається границя $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0 M}$, яка позначається $\frac{\partial u}{\partial l}$ або $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0}$.

Тут $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, $M_0 M = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Отже, за означенням $\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0 M}$.

Якщо функція $u = f(x, y, z)$ диференційована, то має місце формула

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \text{ де } \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma - \text{ напрямні косинуси}$$

вектора \vec{l} .

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни функції за даним напрямом.

Приклад. Знайти похідну функції $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ у точці $M(1;2;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

Розв'язування прикладу

1. Похідна функції $u = f(x, y, z)$ за напрямом $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

2. Знайдемо частинні похідні заданої функції $u(x, y, z)$ у точці $M(1;2;1)$.

Вважаючи y і z сталими, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = \frac{2}{1+4+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Вважаючи x і z сталими, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Вважаючи x і y сталими, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u'_z = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3. Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l} = (2; 4; 4)$.

$$|\vec{l}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6; \quad \cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad \cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \quad \cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

4. Знайдемо шукану похідну.

За формулою $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \cdot \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \cdot \cos \gamma$ знаходимо

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{9}.$$

Скорочений запис розв'язання прикладу

Знайти похідну функції $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ у точці $M(1;2;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

$$1) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = \frac{2}{1+4+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$2) \vec{l} = (2; 4; 4) \Rightarrow |\vec{l}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6,$$

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|} = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|} = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|} = \frac{2}{3};$$

$$3) \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \cdot \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \cdot \cos \gamma = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{9}.$$

Градiєнт функції.

Означення. Градiєнтом функції $u = f(x, y, z)$ називається вектор, проєкціями якого на координатні осі відповідні частинні похідні даної функції:

$$\mathit{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Градiєнт вказує напрямок найшвидшого зростання функції в даній точці. Похідна у напрямі градiєнта має найбільше значення, тобто у напрямі $\vec{l} = \mathit{gradu}$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\max} = |\mathit{gradu}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}.$$