Лекція 18

Диференціювання функції багатьох змінних

Частинні похідні функції двох змінних

На попередній лекції дали означення частинних похідних:

Означення. ***Частинною похідною за змінною*** x функції $z = f(x;y)$ називається границя $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$. , якщо вона існує.

Аналогічно, ***частинна похідна за змінною*** y функції $z = f(x;y)$ визначається як границя $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$.

Таким чином, частинна похідна функції кількох (двох, трьох і більше) змінних визначається як похідна функції однієї з цих змінних за умови сталості значень інших незалежних змінних.

Приклад . Знайти частинні похідні функції $z = 4x^2 + 8y^4 - 10xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(4x^2 + 8y^4 - 10xy\right)'_x = 4 \cdot 2x + 0 - 10y \cdot 1 = 8x - 10y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(4x^2 + 8y^4 - 10xy\right)'_y = 0 + 8 \cdot 4y^3 - 10x \cdot 1 = 32y^3 - 10x$$

Повний диференціал функції багатьох змінних

Повним диференціалом функції $z = f(x;y)$ в точці M_0 називається головна частина повного приросту функції $z = f(x;y)$, лінійна відносно приростів аргументів. Повний диференціал обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Для функції n змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ маємо формулу

$$\boxed{du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.}$$

Частинні похідні другого порядку

Нехай для функції $z = f(x;y)$ визначені частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, які, в загальному випадку також є функціями змінних x і y. Отже, від цих функцій можна знову знайти частинні похідні як за змінною x, так і за змінною y. Ці похідні називаються ***частинними похідними другого порядку*** функції $z = f(x;y)$.

Для похідних другого порядку застосовують наступні позначення:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$ – функція диференціюється послідовно два рази по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y)$ – функція диференціюється послідовно два рази по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y)$ – функція диференціюється спочатку по x, а результат потім диференціюється по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y)$ – функція диференціюється спочатку по y, а результат потім диференціюється по x.

Останні дві похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають **мішаними**.

.

Теорема. Якщо частинні похідні другого порядку неперервні, то мішані похідні рівні між собою за умови їх неперервності:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^4 - 2x^2 y^3 + y^5 + 1$

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 - 2x^2 y^3 + y^5 + 1)'_x = 4x^3 - 4xy^3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 - 2x^2 y^3 + y^5 + 1)'_y = -6x^2 y^2 + 5y^4.$$

Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 - 4xy^3)'_x = 12x^2 - 4y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-6x^2 y^2 + 5y^4)'_y = -12x^2 y + 20y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (-6x^2 y^2 + 5y^4)'_x = -12xy^2.$$

Диференціали вищих порядків

Диференціал 2-го порядку функції $z = f(x, y)$ означують формулою

$$\boxed{d^2 z = d(dz).}$$

Якщо функція f має неперервні частинні похідні і змінні x та y незалежні, то

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

У разі незалежних змінних x та y для *диференціала m-го порядку* функції z, який означають рівністю

$$\boxed{d^m z = d(d^{m-1} z),}$$

маємо аналогічну формулу:

$$\boxed{d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m z,}$$

Похідна за напрямом

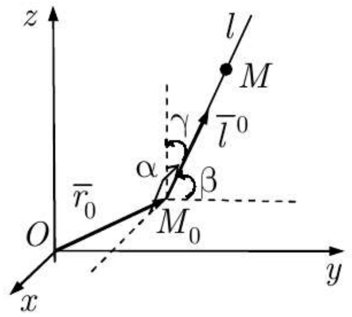
Будь-який напрям l у просторі можна задати одиничним вектором

$$\overline{l}^{0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix},$$

де α, β, γ — кути, утворені напрямом l з осями Ox, Oy і Oz.

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ означена в деякому околі точки M_0 з радіусом вектором

$$\overline{r_0} = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}.$$



Похідною функції $u = f\left(x, y, z\right)$ за даним напрямом $\vec{l}$ в точці M_0 називається границя $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{u\left(M\right) - u\left(M_0\right)}{M_0M}$, яка позначається $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ або $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$.

Тут $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $M_0\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z\right)$, $M_0M = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Отже, за означенням $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{u\left(M\right) - u\left(M_0\right)}{M_0M}$.

Якщо функція $u = f\left(x, y, z\right)$ диференційована, то має місце формула

$\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни функції за даним напрямом.

Приклад. Знайти похідну функції $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ у точці $M(1;2;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

Розв'язування прикладу

1. **Похідна функції** $u = f(x, y, z)$ **за напрямом** $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2. *Знайдемо частинні похідні заданої функції* $u(x,y,z)$ *у точці* $M(1;2;1)$.

Вважаючи y і z сталими, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2};\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \frac{2}{1+4+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Вважаючи x і z сталими, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2};\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Вважаючи x і y сталими, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u'_z = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2};\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3. *Знайдемо напрямні косинуси вектора* $\vec{l} = (2;4;4)$.

$$\left|\vec{l}\right| = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = 6;\ \cos\alpha = \frac{l_x}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ \cos\beta = \frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};\ \cos\gamma = \frac{l_z}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

4. *Знайдемо шукану похідну.*

За формулою $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot\cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot\cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot\cos\gamma$ знаходимо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{9}.$$

Скорочений запис розв’язання прикладу

Знайти похідну функції $u = \ln(x^2+y^2+z^2)$ у точці $M(1;2;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \frac{2}{1+4+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};$$

2) $\vec{l}=(2;4;4)\Rightarrow \left|\vec{l}\right|=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6$,

$$\cos\alpha=\frac{l_x}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{1}{3},\ \cos\beta=\frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{l_z}{\left|\vec{l}\right|}=\frac{2}{3};$$

3) $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cdot\cos\gamma=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{9}$.

Градієнт функції.

Означення. Градієнтом функції $u=f(x,y,z)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі відповідні частинні похідні даної функції:

$$grad u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{z}.$$

Градієнт вказує напрямок найшвидшого зростання функції в даній точці. Похідна у напрямі градієнта має найбільше значення, тобто у напрямі $\vec{l}=grad u$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max}=\left|grad u\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$