Лекція 17

Функції багатьох змінних

Означення функції багатьох змінних

Функції однієї незалежної змінної не охоплюють всі залежності, існуючі в природі. Тому природно розширити відоме поняття функціональної залежності і ввести поняття функції декількох змінних.

Будемо розглядати функції двох змінних, так як всі найважливіші факти теорії функції декількох змінних спостерігаються вже на функціях двох змінних. Ці факти узагальнюються на випадок більшого числа змінних. Крім того, для функцій двох змінних можна дати наочну геометричну інтерпретацію.

Означення. Нехай задано множина D впорядкованих пар чисел $(x;y)$. Якщо кожній парі $(x;y)$ значень двох незалежних змінних величин x і y з деякої області їх змінення D ставиться у відповідність за деяким законом певне значення величини $z \in \mathbb{R}$, то кажуть, що z - **функція двох незалежних змінних**, що визначена в області D.

Символічно функція двох незалежних змінних позначається так:

$$z = f(x;y).$$

Областю визначення функції $z = f(x;y)$ називається множина точок $(x;y)$ площини xOy, у яких задана функція набуває певного дійсного значення.

Безліч значень, які приймає z в області визначення, називається областю значень цієї функції, позначається $E(f)$.

При цьому x і y називаються незалежними змінними (аргументами), а z – залежною змінною

Прикладом функції двох змінних може служити площа S прямокутника зі сторонами, довжини яких дорівнюють x і y: $S = x \cdot y$. Областю визначення цієї функції є множина $\{(x; y) \mid x > 0, y > 0\}$.

Значення функції $z = f(x; y)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0; y_0)$ або $z_0 = f(M_0)$ і називають **частинним значенням функції**.

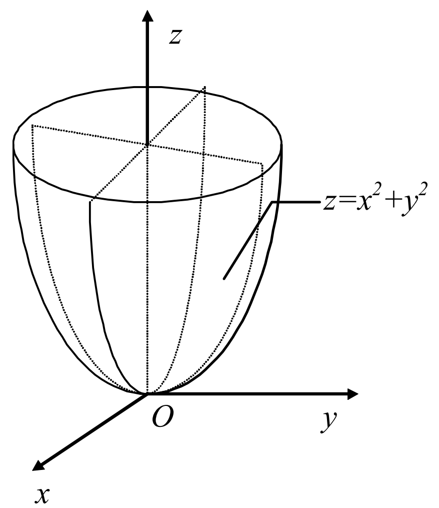
Приклад. Знайти значення функції $z = 2x^2 + 3xy$ в точці $M_0(1; 2)$

$$z_{M_0} = z(1; 2) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 = 8$$

Функція двох змінних, як і функція однієї змінної, може бути задана різними способами: таблицею, аналітично, графіком.

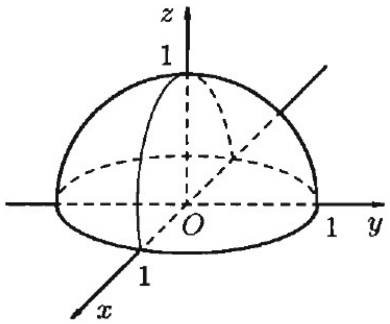
Аналогічно визначається функція будь-якого скінченного числа незалежних змінних $u = f(x; y; z; ...; t)$.

Означення.



Графіком

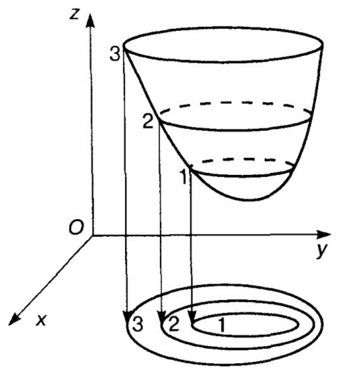
Наприклад, графіком функції $z = x^2 + y^2$ є параболоїд обертання.



Функція $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ має область визначення коло $x^2+y^2\le 1$ і зображується верхньою полусферою с центром у точці $O(0;0;0)$ і радіусом $R=1$

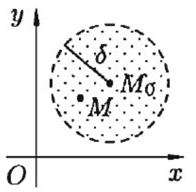
Формально графік можна визначити і для $n>2$ числа змінних. В цьому випадку він називається гіперповерхньою в $(n+1)$- мірному просторі. Про цей графік можна говорити тільки абстрактно – зобразити його на рисунку не є можливим.

Означення. Лінією рівня функції $z=f(x;y)$ називається лінія на площині XOY, в кожній точці якої функція приймає одне й теж значення. Рівняння лінії рівня $f(x;y)=c$, де c - стала.



Границя функції двох змінних

Означення. Множина усіх точок $M(x;y)$ площини, координати яких Задовольняють нерівності $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, називається δ - окілом точки $M_0(x_0;y_0)$.



Іншими словами δ - окіл точки $M_0(x_0;y_0)$ - це усі внутрішні точки круга с центром $M_0(x_0;y_0)$ і радіусом δ.

Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$, окрім, бути може, самої точки.

Означення. Число A називається **границею функції** $z=f(x;y)$ при $x\to x_0$ і $y\to y_0$ (або, що теж саме, при $M(x;y)\to M_0(x_0;y_0)$), якщо для любого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що для усіх $x\neq x_0$, $y\neq y_0$, що задовольняють нерівності $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ виконується нерівність $|f(x;y)-A|<\varepsilon$. Записують:

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) \quad \text{або} \quad A=\lim_{M\to M_0} f(M).$$

Зауваження.

З означення випливає, що якщо границя існує, то вона не залежить від шляху, за яким точка M прямує до точки M_0 (кількість таких напрямів нескінченна; для функцій однієї змінної $x\to x_0$ лише по двох напрямах).

Приміром, функція $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ має різні границі вздовж різних променів $y=kx$, коли $x\to 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Частинні похідні функції двох змінних

Розглянемо функцію $z=f\left(x;y\right)$. Нехай незалежна змінна y прийняла стале значення y_0.

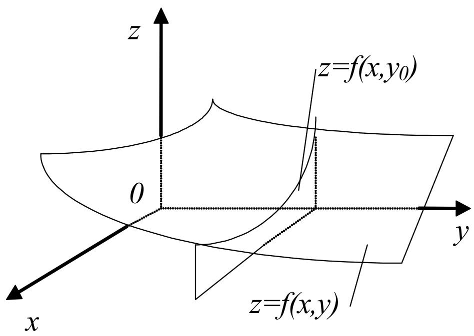


Рис..2.

П

Аналогічно, якщо x зберігає постійне значення x_0, а y придамо приріст Δy

$$\Delta_y z=f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right).$$

Якщо аргументу x придати приріст Δx, а аргументу y – приріст Δy, то функція $z=f\left(x;y\right)$ отримає приріст Δz, який називається *повним приростом* функції і визначається формулою:

$$\Delta z=f\left(x+\Delta x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right).$$

О

Частинна похідна за змінною x функції $z=f\left(x;y\right)$ позначається одним з символів

$$z'_x,\ f'_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частинною похідною за змінною x функції $z=f\left(x;y\right)$ називається границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$, якщо вона існує.

Таким чином, за означенням, $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta x}$.

Аналогічно, ***частинна похідна за змінною*** y функції $z=f\left(x;y\right)$ визначається як границя $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$

Частинна похідна за y функції $z = f\left(x; y\right)$ позначається одним з символів

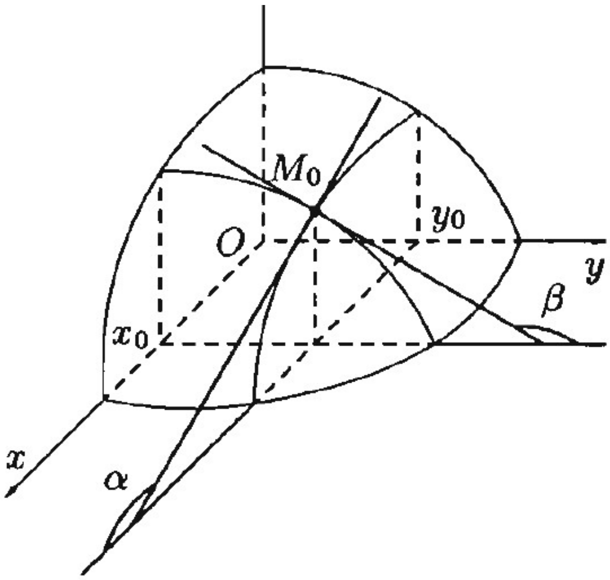
$$z'_y,\ f'_y(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Таким чином, за означенням, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$.

Таким чином, частинна похідна функції кількох (двох, трьох і більше) змінних визначається як похідна функції однієї з цих змінних за умови сталості значень інших незалежних змінних.

Графіком функці

Аналогічно, $f'_y\left(x_0; y_0\right) = tg\beta$



П

омітивши, що

Останні означення дозволяють застосовувати для обчислення частинних похідних правила знаходження похідної для функції однієї змінної.

EMBED

E

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 3x + 5y + 6xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x + 5y + 6xy\right)'_x = 3\cdot 1 + 0 + 6y\cdot 1 = 3 + 6y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3x + 5y + 6xy\right)'_y = 0 + 5\cdot 1 + 6x\cdot 1 = 5 + 6x$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $z = 4x^2 + 8y^4 - 10xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(4x^2 + 8y^4 - 10xy\right)'_x = 4\cdot 2x + 0 - 10y\cdot 1 = 8x - 10y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(4x^2 + 8y^4 - 10xy\right)'_y = 0 + 8\cdot 4y^3 - 10x\cdot 1 = 32y^3 - 10x$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні функції $z = 2xy + y^3$ в т. $M_0\left(2;1\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2xy + y^3\right)'_x = 2y\cdot 1 + 0 = 2y \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0(2;1)} = 2\cdot 1 = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2xy + y^3\right)'_y = 2x\cdot 1 + 3y^2 \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0(2;1)} = 4 + 3 = 7$$

Зауваження. Частинні похідні функції будь-якого числа змінних визначаються аналогічно.