Лекція 16

Диференціальні рівняння вищих порядків

Означення. ***Диференціальним рівнянням*** n - го порядку називається рівняння вигляду

$$F\left(x, y, y', ..., y^n\right) = 0 \qquad (1)$$

$$\text{або} \quad y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{n-1}\right) \qquad (2)$$

Задачею Коші для диференціального рівняння (2) називається задача відшукання його розв'язку $y = y(x)$, що задовольняє задані початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y^{n-1}{}_0 \qquad (3)$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) або (2) називається така функція $y = \varphi(x, C_1, ...C_n)$, яка при будь-яких припустимих значеннях параметрів $C_1, C_2, ..., C_n$ є розв'язком цього диференціального рівняння і для будь-якої задачі Коші з умовами (3) знайдуться сталі $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$, які визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, ...C_n) \\ y'_0 = \varphi'(x, C_1, ...C_n) \\ \quad \ldots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, ...C_n) \end{cases},$$

такі, що функція $y = \varphi\left(x, C_1^0, ...C_n^0\right)$ задовольняє ці початкові умови.

Загальним інтегралом диференціального рівняння називається рівняння

$$\Phi\left(x, y, C_1, ..., C_n\right) = 0, \qquad (4)$$

яке визначає загальний розв'язок як неявну функцію.

Частинний розв'язок або частинний інтеграл отримується із загального при заданих числових значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_n$.

Теорема існування і єдності розв'язку задачі Коші. Якщо диференціальне рівняння (2) таке, що функція $f\left(x, y, y', ..., y^{n-1}\right)$ в деякій області D зміни своїх аргументів неперервна і має неперервні частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для будь-якої точки $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{n-1}\right) \in D$ існує єдиний розв'язок цього диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови (3).

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$y'' + a_1\left(x\right) y' + a_2\left(x\right) y = 0 \qquad (5)$$

і встановимо деякі властивості його розв'язків.

Теорема 1. Якщо функції $y_1 = y_1\left(x\right)$ і $y_2 = y_2\left(x\right)$ є частинними розв'язками рівняння (5), то розв'язком цього рівняння є також функція

$$y = C_1 y_1\left(x\right) + C_2 y_2\left(x\right), \qquad (6)$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Дійсно, якщо підставити функцію $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ і її похідні до лівої частини рівняння (5) , отримаємо вірну рівність:

$$\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right)'' + a_1\left(x\right) \cdot \left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right)' + a_2\left(x\right) \cdot \left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = 0$$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1\left(x\right) \cdot \left(C_1 y_1' + C_2 y_2'\right) + a_2\left(x\right) \cdot \left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = 0$$

$$C_1\left(y_1'' + a_1\left(x\right) \cdot y_1' + a_2\left(x\right) \cdot y_1\right) + C_2\left(y_2'' + a_1\left(x\right) \cdot y_2' + a_2\left(x\right) \cdot y_2\right) = 0.$$

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$$

Функція (6) має дві довільні сталі і є рішенням рівняння (5). Чи може вона бути загальним розв'язком рівняння (5)? Для відповіді на це питання введено означення лінійної залежності і лінійної незалежності функцій.

Означення. Функції $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ називаються ***лінійно незалежними*** на інтервалі $(a;b)$, якщо рівність $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$, де $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, виконується тоді і тільки тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. В протилежному випадку функції y_1 і y_2 називаються ***лінійно залежними*** на інтервалі $(a;b)$.

Очевидно, що функції y_1 і y_2 лінійно залежні коли вони пропорційні, тобто для них виконується рівність $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$, де $\lambda = const$.

Наприклад, функції $y_1 = 3e^x$ і $y_2 = 6e^x$ - лінійно залежні,

а функції $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$ - лінійно незалежні.

Засобом вивчення лінійної залежності системи функцій є так званий визначник Вронського (вронскіан).

Для двох диференційованих функцій $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ вронскіан має вигляд

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Мають місце наступні теореми.

Теорема 2. Якщо диференційовані функції $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ лінійно залежні на інтервалі $(a;b)$, то визначник Вронського на цьому інтервалі дорівнює нулю.

Теорема 3. Якщо диференційовані функції $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ лінійно незалежні на інтервалі $(a;b)$, то визначник Вронського на цьому інтервалі ніде не обертається в нуль.

Сукупність будь-яких двох лінійно незалежних на інтервалі $(a;b)$ частинних рішень $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку визначає **фундаментальну систему рішень** цього рівняння: будь-який довільний розв'язок може бути отриманий як комбінація $y=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)$.

Теорема 4. (**Структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння**). Якщо два частинних розв'язка $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ складають на інтервалі $(a;b)$ фундаментальну систему, то загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \qquad (7)$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Приклад. Для рівняння $y'' + y = 0$ існують частинні розв'язки $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$.

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = -1 \neq 0$$

Частинні розв'язки $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$ лінійно незалежні, тому утворюють фундаментальну систему рішень. Тому загальний розв'язок рівняння $y'' + y = 0$ є функція $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Означення. ***Лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами*** називається рівняння, лінійне відносно функції $y(x)$ та її похідних $y', y'', ...y^{(n)}$:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (8)$$

де $a_i, \left(i = \overline{1,n}\right)$ – дійсні числа.

Теорема 5. Якщо функції $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ є частинними розв’язками рівняння (8), то розв’язком цього рівняння є також функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x), \qquad (9)$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Означення. Функції $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ називаються ***лінійно незалежними*** на інтервалі $(a;b)$, якщо рівність $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n = 0$, де $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, виконується тоді і тільки тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. В протилежному випадку (якщо хоча б одно з чисел α_i не дорівнює нулю) функції y_1, $y_2, \ldots y_n$ називаються ***лінійно залежними*** на інтервалі $(a;b)$.

Визначник Вронського (вронскіан) має вигляд:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Частинні розв’язки $y_1, y_2, ..., y_n$ складають фундаментальну систему на інтервалі $(a;b)$, якщо ні в одної точці цього інтервалу вронскіан не обертається в нуль, тобто $W(x) \neq 0$ для усіх $x \in (a;b)$.

Теорема 6. (Структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння). Якщо частинні розв'язки $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots,$ $y_n = y_n(x)$ складають на інтервалі $(a;b)$ фундаментальну систему, то загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \qquad (10)$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь (ЛОДР) n - го порядку зі сталими коефіцієнтами $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$ знаходиться за допомогою **характеристичного рівняння**

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \qquad (11)$$

яке отримується із диференціального рівняння, якщо:

1) всі коефіцієнти a_i зберегти;

2) виконати такі заміни: $y \to 1, y' \to k, y'' \to k^2, \ldots, y^{(n)} \to k^n$.

При цьому:

1) кожному дійсному простому кореню k характеристичного рівняння в загальному розв'язку ЛОДР відповідає один доданок вигляду

$$y = C \cdot e^{kx}; \qquad (12)$$

2) кожному дійсному кореню k кратності s характеристичного рівняння в загальному розв'язку ЛОДР відповідає s доданків, які подаються формулою

$$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 \cdot x + \ldots + C_s \cdot x^{s-1}\right); \qquad (13)$$

3) кожній парі комплексних спряжених коренів $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння у загальному розв'язку ЛОДР відповідає така пара доданків:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right); \qquad (14)$$

4) кожній парі комплексних спряжених коренів $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння кратності s у загальному розв'язку ЛОДР відповідає s пар доданків:

$$y = e^{\alpha x}((C_1 + C_2 x + \ldots + C_s x^{s-1})\cos\beta x +$$

$$+(C_{s+1} + C_{s+2} x + \ldots + C_{2s} x^{s-1})\sin\beta x). \qquad (15)$$

Для ЛОДР II-го порядку $ay'' + by' + cy = 0$ **характеристичне рівняння** має вигляд

$$ak^2 + bk + c = 0;$$

загальний розв'язок:

1) якщо $k_1 \neq k_2,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y_o = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$; (16)

2) якщо $k_1 = k_2 = k,\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow y_o = C_1 e^{kx} + C_2 e^{kx} \cdot x;$ (17)

3) якщо $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y_o = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$ (18)

($k_{1,2}$ – корені характеристичного рівняння).

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Рішення. Напишемо характеристичне рівняння: $k^2 + 5k + 6 = 0$.

Корні характеристичного рівняння $k_1 = -2$ і $k_2 = -3$.

Згідно (16), якщо $k_1 \neq k_2 \Rightarrow y_o = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Загальний розв'язок цього рівняння $y_o = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$.

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Рішення. Напишемо характеристичне рівняння: $k^2 - 10k + 25 = 0$.

Корні характеристичного рівняння $k_1 = k_1 = 5$.

Згідно (17), якщо $k_1 = k_2 = k \Rightarrow y_o = C_1 e^{kx} + C_2 e^{kx} \cdot x;$

Загальний розв'язок цього рівняння $y_o = C_1 e^{5x} + C_2 e^{5x} \cdot x$.

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Рішення. Напишемо характеристичне рівняння: $k^2 - 6k + 25 = 0$.

Корні характеристичного рівняння $k_{1,2} = 3 \pm 4i$.

Згідно (18), якщо $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y_o = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$

Загальний розв'язок цього рівняння $y_o = e^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right)$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

Означення. ***Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами*** називається рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (19)$$

де $a_i, \left(i = \overline{1, n}\right)$ – дійсні числа.

Рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (20)$$

називають **відповідним йому однорідним рівнянням**.

Теорема. (***Структура загального розв'язку ЛНДР***). Загальний розв'язок диференціального рівняння (19) є сумою загального розв'язку $y_o(x)$ відповідного йому однорідного рівняння (20) і будь-якого частинного розв'язку $y_ч(x)$ рівняння (19):

$$y(x) = y_0(x) + y_ч(x). \qquad (21)$$

Для **ЛНДР** с постійними коефіцієнтами існує простий засіб знаходження $y_ч(x)$, якщо права частина рівняння (1) має так званий «спеціальний вигляд».

Спеціальна права частина ЛНДР має вигляд

I) $$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}, \qquad (22)$$

або

II) $$f(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot \left(P_{n1}(x) \cdot \cos \beta x + P_{n2}(x) \cdot \sin \beta x\right), \qquad (23)$$

де $P_{n_1}(x), P_{n_2}(x)$ – многочлени, які можуть бути як одного і того ж порядку, так і різних порядків (ці многочлени можуть бути і нульового порядку, тобто сталими величинами);

величини α і β – дійсні числа (кожне з них також може дорівнювати нулю);

число $m = \alpha \pm i\beta$ називають «контрольним числом».

Приклади рівнянь зі правою частиною спеціального вигляду.

$y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$; $\qquad y'' + 6y' + 5y = \left(7x^2 - 3x + 2\right) \cdot e^{5x}$

$y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x$; $\qquad y'' - 2y' + 10y = e^{2x}\left(46x \sin 3x + x^5 \cos 2x\right)$

Частинний розв'язок ЛНДР зі спеціальною правою частиною (22), (23) має вигляд:

1) якщо $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}$ (22), то $y_ч(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot x^s$, (24)

2) якщо $f(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot (P_{n1}(x) \cdot \cos \beta x + P_{n2}(x) \cdot \sin \beta x)$ (23), то

$$y_ч(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_n(x) \cdot \sin \beta x) \cdot x^s, \qquad (25)$$

де $P_n(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени одного і того ж порядку $n = \max(n_1, n_2)$. Показник степеня s дорівнює кратності кореня $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння відповідного ЛОДР. Таким чином визначенню підлягають тільки коефіцієнти многочленів $P_n(x)$ і $Q_n(x)$, усі ж решта чисел α, β і s відомі.

Зауваження.

1. Многочлени $P_n(x)$ і $Q_n(x)$ в (24)) мають бути повними, тобто містити всі степені x від нуля до n.

2. Якщо у вираз функції $f(x)$ входить хоча б одна з функцій $\cos \beta x$ або $\sin \beta x$, то в $y_ч(x)$ потрібно завжди вводити обидві функції.

3. Якщо права частина ЛНДР є сумою двох функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, то слід розв'язувати два рівняння, у яких ліві частини такі ж, як у заданому ЛНДР, але в одному з них правою частиною буде функція $f_1(x)$, а в другому – $f_2(x)$ (теорема накладання розв'язків). Частинним розв'язком даного рівняння є сума $y_{ч1}(x) + y_{ч2}(x)$ (ця властивість розповсюджується і на випадок, коли права частина – сума n функцій).

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-12y'+36y=72x-4$.

Рішення. Загальний розв'язок має вигляд: $y(x)=y_0(x)+y_ч(x)$

1) Відповідне характеристичне рівняння $y''-12y'+36y=0$.

Напишемо характеристичне рівняння: $k^2-12k+36=0$.

Корні характеристичного рівняння $k_1=k_1=6$.

Згідно (17), якщо $k_1=k_2=k \Rightarrow y_o=C_1e^{kx}+C_2e^{kx}\cdot x;$

Загальний розв'язок цього рівняння $y_o=C_1e^{6x}+C_2e^{6x}\cdot x$.

2) Знайдемо частинний розв'язок.

Права частина рівняння $y''-12y'+36y=72x-4$ це $f(x)=72x-4$. Спеціальна права частина ЛНДР має вигляд (22) $f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha\cdot x}$,

для (22) $y_ч(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot x^s$.

$\alpha=0,\ \ \alpha\neq k\Rightarrow s=0$.

Тому в нашому випадку $y_ч(x)=(Ax+B)\cdot e^{0\cdot x}\cdot x^0=Ax+B$

$y_ч(x)=Ax+B$ $y_ч'(x)=A$ $y_ч''(x)=0$	$y''-12y'+36y=72x-4$ $0-12A+36(Ax+B)=72x-4$ $36Ax+(-12A+36B)=72x-4$	$\begin{cases}36A=72\\-12A+36B=-4\end{cases}$	$\begin{cases}A=2\\B=\dfrac{5}{9}\end{cases}$

$y_ч(x)=Ax+B$

$y_ч(x)=2x+\frac{5}{9}$

Загальний розв'язок має вигляд: $y(x)=y_0(x)+y_ч(x)$

$$y(x)=C_1e^{6x}+C_2e^{6x}\cdot x+2x+\frac{5}{9}.$$

Відповідь: $y(x)=C_1e^{6x}+C_2e^{6x}\cdot x+2x+\frac{5}{9}$