Лекція 15

Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

Правило Лопіталя застосовують для розкриття невизначеностей $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Теорема. (Правило Лопіталя).

Якщо:

1) функції $f(x)$ і $g(x)$ в деякому околі точки $x=a$ (окрім, можливо самої точки a) неперервні і диференційовані;
2) функції $f(x)$ і $g(x)$ прямують до нуля або до нескінченності при $x \to a$, тобто
   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$
3) $g'(x) \neq 0$;
4) існує границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна),

то існує і $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причому $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Зауваження.

1. Правило Лопіталя справедливе і при $a = \pm\infty$.
2. Правило Лопіталя може застосовуватись повторно. На кожному етапі застосування правила Лопіталя слід користуватись тотожними перетвореннями, що спрощують вираз, а також комбінувати це правило з будь-якими іншими способами обчислення границь, зокрема, використовувати еквівалентні нескінченно малі та нескінченно великі.
3. Слід пам'ятати, що $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ може існувати, а $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не існує. Тоді правило Лопіталя не може бути застосовано.
4. У випадку невизначеностей типу $\{0\cdot\infty\}$ или $\{\infty-\infty\}$ слід алгебраїчно перетворити функцію так, щоб привести її до невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ і тоді застосувати правило Лопіталя.

5. У випадку невизначеностей типу $\{0^0\}$ або $\{\infty^0\}$, або $\{1^\infty\}$ слід прологарифмувати дану функцію і знайти границю її логарифма.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$

Розв'язок. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{\left(\arcsin 3x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}e^{2x}\sqrt{1-9x^2}=\frac{2}{3}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$

Розв'язок. $$\lim_{x\to 1}\frac{tg\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(tg\dfrac{\pi x}{2}\right)'}{\left(\ln\left(1-x\right)\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi x}{2}}}{\dfrac{-1}{1-x}}=-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos^2\dfrac{\pi x}{2}}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2\sin\dfrac{\pi x}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{0}=\infty.$$

За правилом Бернуллі — Лопіталя можна довести, що:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0, n\in\mathbb{N}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0, \alpha>0.$$

Тобто, степенева функція $x^\alpha, \alpha>0$, зростає не порівняно швидше логарифмічної і не порівняно повільніше показникової функції.

$$\boxed{\ln x \ll x^\alpha \ll e^x, x\to+\infty\ \forall\alpha>0.}$$

Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої

Спочатку знайдемо рівняння дотичної до кривої. Нехай задана крива $y = f(x)$ і точка $M_0(x_0, y_0)$, яка належить цій лінії. Проведемо дотичну до кривої в точці M_0 (рис. 7).

Застосуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямку: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

За геометричним змістом похідної: $k = \text{tg}\alpha = y'(x_0) = f'(x_0)$.

Тоді *рівняння дотичної до кривої* $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ буде мати вигляд

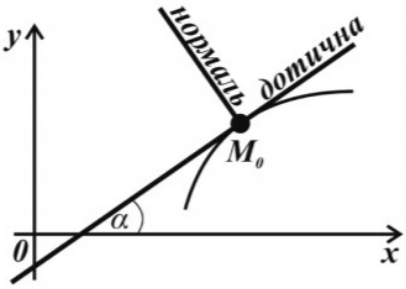

Рис. 7

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (10)$$

Нормаль – пряма, яка проходить через точку дотику M_0 перпендикулярно дотичній.

Для того щоб записати рівняння нормалі, достатньо згадати умову перпендикулярності прямих: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Тоді *рівняння нормалі* буде мати вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (11)$$

Уважно розглянувши формули (10) і (11), робимо висновок: для того щоб скласти рівняння дотичної або нормалі до кривої $y = f(x)$ у заданій точці $M_0(x_0, y_0)$, необхідно:

1. Спочатку знайти похідну функції $y = f(x)$.
2. Потім знайти значення цієї похідної в заданій точці: $y_0 = f'(x_0)$
3. Підставити координати точки M_0 і значення похідної $f'(x_0)$ у відповідне рівняння.

Приклад. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$:

1) $y = x^2 - 4x$ $\quad M_0(1; -3)$;

2) $y = e^x$ $\quad M_0(0; 1)$;

3) $y = 3\ln x - 4$ $\quad M_0(1; -1)$.

Розв'язання.

1. Знайдемо похідну: $y' = 2x - 4$. Потім обчислимо похідну в заданій точці $M_0(1; -3)$: $y'(1) = f'(1) = -2$. Маючи на увазі, що $x_0 = 1$, $y_0 = -3$, запишемо рівняння дотичної (10):

$$y + 3 = (-2)(x - 1) \Rightarrow y + 3 = -2x + 2 \Rightarrow 2x + y + 1 = 0.$$

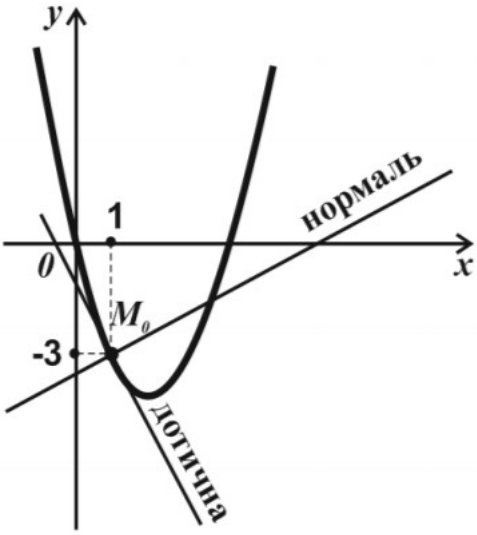

Рис. 8

Запишемо рівняння нормалі (11):

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y + 6 = x - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - 2y - 7 = 0.$$

На рис. (8): крива $y = x^2 - 4x$ (до речі, парабола), дотична і нормаль, які проведені до кривої в точці $M_0(1; -3)$.

2. Розв'язання аналогічне:

$$y = e^x; \quad y' = e^x; \quad y'(0) = 1.$$

Рівняння дотичної: $y - 1 = x \Rightarrow x - y + 1 = 0$.

Рівняння нормалі: $y - 1 = -x \Rightarrow x + y - 1 = 0$.

3. $y' = \dfrac{3}{x}$ $\quad y'(1) = 3$.

Рівняння дотичної: $y + 1 = 3(x - 1) \Rightarrow 3x - y - 4 = 0$.

Рівняння нормалі: $y + 1 = -\dfrac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow x + 3y + 2 = 0$.