Лекція 15

Диференціальні рівняння першого порядку

Означення. ***Диференціальним рівнянням*** називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, функцію цієї змінної та похідні або диференціали функції.

Приклади диференціальних рівнянь: $y'' + 4y + 4yx = \cos 2x$,

$$xdx + y^2 dy = 0.$$

Означення. Якщо функції, що входять в диференціальне рівняння, залежать від однієї незалежної змінної, то рівняння називають ***звичайним диференціальним рівнянням***.

Означення. Якщо в рівняння входять частинні похідні невідомих функцій за декількома змінними, то рівняння називається **диференціальним рівнянням с частинними похідними**.

Наприклад, $y \cdot z'_x = x \cdot z'_y$.

Далі будемо розглядати тільки звичайні диференціальні рівняння.

Нехай x - незалежна змінна і y - функція, яку треба знайти. Загальний вигляд диференціального рівняння має вигляд:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

Означення. Найвищий порядок n похідної невідомої функції, що входить в рівняння, називається ***порядком диференціального рівняння***.

Наприклад, $y''' = \cos 2x$ - диференціальне рівняння третього порядку;

$y'' - 3y' + 2 = 3e^{6x}$ - диференціальне рівняння другого порядку;

$y = y' tgx$ - диференціальне рівняння першого порядку.

Процес пошуку розв'язку диференціального рівняння називається ***інтегруванням диференціального рівняння***.

Якщо деяка функція $y = \varphi(x)$ задовольняє диференціальному рівнянню, тобто якщо це рівняння обертається в тотожність при заміні y і y' на $\varphi(x)$ і $\varphi'(x)$, то функція $\varphi(x)$ називається **розв'язком** цього диференціального рівняння.

Приклад. Перевірити, чи є функція $y = 5x^4$ розв'язком диференціального рівняння $xy' - 4y = 0$.

Розв'язок. $y = 5x^4$, $y' = 20x^3$. Підставимо функцію і її похідну до рівняння:

$$xy' - 4y = 0;$$

$$x \cdot 20x^3 - 4 \cdot 5x^4 = 0;$$

$$20x^4 - 20x^4 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Отже, функція $y = 5x^4$ є розв'язком диференціального рівняння $xy' - 4y = 0$.

Зауважимо, що вище розглянуте диференціальне рівняння має нескінченну множину розв'язків.

Наприклад, функції $y = 10x^4$ або $y = 20x^4$ розв'язки рівняння $xy' - 4y = 0$.

$y = 10x^4$, $y' = 40x^3$. Підставимо функцію і її похідну до рівняння:

$$xy' - 4y = 0;$$

$$x \cdot 40x^3 - 4 \cdot 10x^4 = 0;$$

$$40x^4 - 40x^4 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Можна зробити висновок, що розв'язком диференціального рівняння $xy' - 4y = 0$ є функція $y = Cx^4$, $C \in \mathbb{R}$. Такий розв'язок називають загальним розв'язком або загальним інтегралом.

Зауваження. Інтегрування диференціального рівняння у загальному випадку призводить до нескінченної кількості розв'язків, які відрізняються друг від друга сталими величинами. Для того, щоб конкретизувати розв'язок диференціального рівняння, треба задати для диференціального рівняння деякі додаткові умови.

Означення. Умову, яка визначає, що при $x = x_0$ функція $y = y_0$, називають ***початковою умовою***, а числа x_0, y_0 називають початковими значеннями. Початкова умова позначаться:

$$y\left(x_0\right) = y_0 \quad \text{або} \quad y\big|_{x=x_0} = y_0$$

Означення. ***Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку*** рівняння називається функція $y = \varphi\left(x;C\right)$, яка має одну довільну сталу і задовольняє наступним умовам:

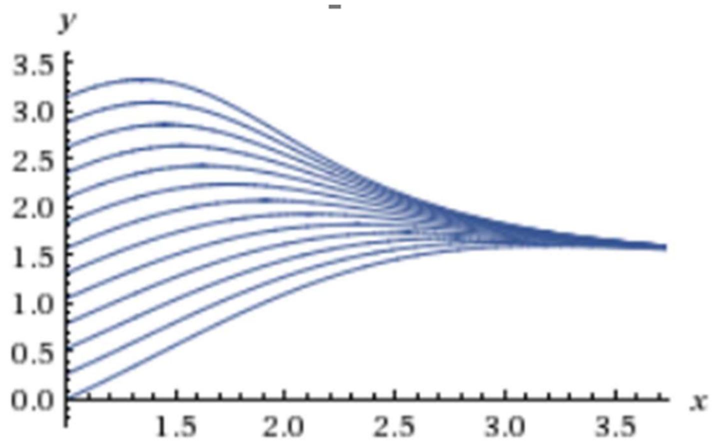
1. Функція $y = \varphi\left(x;C\right)$ є розв'язком диференціального рівняння для всіх значень сталої C з деякої множини;

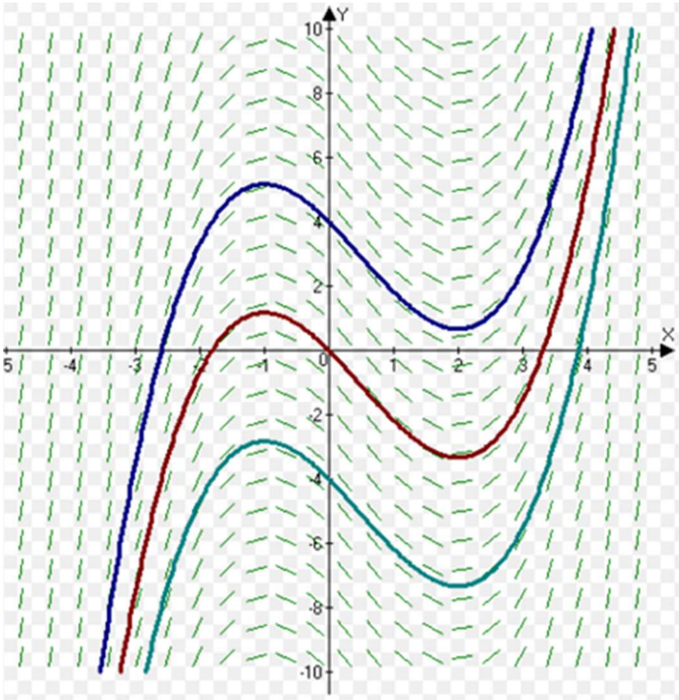
2. Для будь-якої початкової умови $y\left(x_0\right) = y_0$, такої, що існує єдине значення $C = C_0$ при якому розв'язок $y = \varphi\left(x;C_0\right)$ задовольняє цю початкову умову.

Означення. ***Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку*** називається функція $y = \varphi\left(x;C_0\right)$, яка отримана з загального розв'язку $y = \varphi\left(x;C\right)$ при $C = C_0$.

З погляду геометрії $y = \varphi\left(x;C\right)$ є множина інтегральних кривих на площині Oxy. Частинний розв'язок $y = \varphi\left(x;C_0\right)$ - одна із цієї множини кривих, що проходить через точку $\left(x_0, y_0\right)$.

Графіки інтегральних кривих диференціального рівняння $xy' + x^y = 2x$





Графіки інтегральних кривих диференціального рівняння $y' = x^2 - x - 2$

Приклад 1. Для рівняння $y' = 2x$ знайти загальний і частинні розв'язки.

Знайдемо загальний розв'язок: $y = \int 2x dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = x^2 + C$.

З загального розв'язку $y = x^2 + C$ отримаємо частинні розв'язки, підставив замість C певні сталі: $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - 5$.

Приклад 2. Для рівняння $y' = 6x^2$ знайти частинний розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову $y(1) = 10$.

Знайдемо загальний розв'язок: $y = \int 6x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + C = 2x^3 + C$.

У загальний розв'язок $y = 2x^3 + C$ підставимо початкові умови $y(1) = 10$ для визначення значення сталої C в частинному розв'язку: $10 = 2 \cdot 1^3 + C$. Отримаємо $C = 8$.

Отже частинний розв'язок рівняння $y' = 6x^2$, який задовольняє початкову умову $y(1) = 10$ є рівняння $y = 2x^3 + 8$.

Зауваження. Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено у неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають ***загальним інтегралом*** цього рівняння. Рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називають ***частинним інтегралом*** цього рівняння.

Задача пошуку розв'язка диференціального рівняння, що задовольняє заданій початковій умові, називають **задачею Коші**.

Теорема (існування і єдність розв'язку задачі Коші).

Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ неперервні в деякій області D, що має точку (x_0, y_0), то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Геометрично це означає, що через кожну точку області (x_0, y_0) проходить лише одна інтегральна лінія.

Означення. Точки площини, в яких не виконуються умови теореми Коші, називаються ***особливими***. Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдності, називається ***особливим розв'язком***.

Через особливі точки або взагалі не проходить жодна інтегральна лінія, або проходить декілька інтегральних ліній. Отже:

1) **особливим розв'язком** диференціального рівняння є такий розв'язок, який не можна отримати із загального розв'язку ні при яких значеннях довільних сталих C_n (в тому числі і при $C = \pm\infty$). Геометрично це означає, що графік особливого розв'язку не входить в сімейство інтегральних ліній. Особливі розв'язки можуть виявитися серед розв'язків, загублених при перетворенні заданого рівняння в процесі його інтегрування;

2) **особливим розв'язком** диференціального рівняння є також такий розв'язок, який можна отримати із загального розв'язку при будь-яких значеннях довільних сталих C_n (геометрично це означає, що через точку, яка є особливим розв'язком, проходить декілька інтегральних ліній).

Різні типи диференціальних рівнянь першого порядку та методи їх інтегрування.

Диференціальні рівняння з відокремленими змінними і такі, що зводяться до них

Найбільш простим диференціальним рівнянням є рівняння з відокремленими змінними. Воно має вигляд:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \qquad (2)$$

Інтегруючи почленно це рівняння отримаємо його загальний інтеграл:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C \qquad (3)$$

Приклад. Знайти загальний інтеграл рівняння $x^2dx + y^2dy = 0$

Розв'язок. $x^2dx + y^2dy = 0$

$$y^2dy = -x^2dx$$

$$\int y^2dy = -\int x^2dx$$

$$\frac{y^3}{3} + C_1 = -\frac{x^3}{3} + C_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^3}{3} = -\frac{x^3}{3} + C_3$$

$$\frac{y^3}{3} = -\frac{x^3}{3} + \frac{C}{3}$$

$y^3 = -x^3 + C$ - загальний інтеграл диференціального рівняння.

Більш загальний випадок рівнянь, що зводяться до рівнянь з відокремленими змінними, має вигляд:

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \qquad (4)$$

Рівняння (4) легко зводиться до рівняння (2), якщо рівняння (4) почленно поділити на $P_2(x)Q_1(y)$. Отримаємо:

$$\frac{P_1(x)Q_1(y)}{P_2(x)Q_1(y)}dx + \frac{P_2(x)Q_2(y)}{P_2(x)Q_1(y)}dy = 0$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$$

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = -\int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy + C$$ загальний інтеграл.

Зауваження. При діленні обох частин рівняння $P_2(y)\cdot Q_1(x)$, що містить невідомі x і y, можуть бути **загублені розв'язки**, які обертають цей вираз в нуль. **Обов'язково** потрібно **перевірити** існування цих розв'язків. Тому, отримавши зазначеним вище методом відокремлення змінних загальний інтеграл рівняння, потрібно перевірити, чи входять в його склад (при відповідних числових значеннях параметра C) згадані окремі розв'язки. Якщо не входять, то їх слід включити у відповідь (як **особливі розв'язки**).

Приклад. Розв'язати рівняння $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$

$$y(1+x)dx + x(1-y)dy = 0$$

Поділимо обидві частини на $x \cdot y \neq 0$

$$\frac{(1+x)}{x}dx + \frac{(1-y)}{y}dy = 0$$

$$\int \frac{(1+x)}{x}dx + \int \frac{(1-y)}{y}dy = \int 0$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + \int \left(1 - \frac{1}{y}\right)dy = C$$

$$x + \ln|x| + y - \ln|y| = C$$

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| + x + y = C$$ - загальний інтеграл.

В цьому прикладі $P_2(y)\cdot Q_1(x) = 0$ має вигляд $xy = 0$. Його рішення $x = 0$, $y = 0$ є розв'язком даного диференціального рівняння $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$. Але цей розв'язок не входить в загальний інтеграл. Тобто розв'язок $x = 0$, $y = 0$ є особливим.

До рівнянь з відокремлюваними змінними зводяться також:

1) рівняння вигляду $y' = f(ax + by + c)$, $b \neq 0$, що розв'язуються підстановкою $z = ax + by + c$;

2) рівняння вигляду $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, де $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, що розв'язуються підстановкою $z = a_1x + b_1y$.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = \cos(y - x)$.

Задане рівняння зводиться до рівняння з відокремленими змінними.

Покладемо: $z = y - x$. Тоді $z' = y' - 1$

$$z' + 1 = y'$$

$$z' + 1 = \cos z$$

$$z' = \cos z - 1$$

$$\frac{dz}{dx} = \cos z - 1.$$

Відокремлюючи змінні, дістанемо

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx$$

Інтегруємо: $\displaystyle\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx$

$$-\int \frac{dz}{2\sin^2 \frac{z}{2}} = x$$

$$ctg\frac{z}{2} + C = x$$

Повертаючись до старої змінної, маємо загальний інтеграл:

$$ctg\frac{y - x}{2} + C = x.$$