

Комплексні числа

Множина дійсних чисел позначається \mathbb{R} , а множина комплексних чисел позначається через \mathbb{C} . На цій лекції покажемо, як між множинами \mathbb{C} і \mathbb{R}^2 встановлюється взаємно-однозначна відповідність.

Означення. *Комплексне число* – це вираз вигляду:

$$z = x + iy \quad (1)$$

де x, y - дійсні числа ($x, y \in \mathbb{R}$), а i - символ, що називається уявною одиницею, що визначається умовою $i^2 = -1$.

Приклади комплексних чисел: $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 9 - 5i$, $z_3 = 10$, $z_4 = 7i$

Формула (1) називається **алгебраїчною формою запису комплексного числа**. Число x - називається дійсною частиною комплексного числа z , а число y називається уявною частиною комплексного числа z . Символічно їх позначають так:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Примітка. Слід пам'ятати, що уявна частина будь-якого комплексного числа є число дійсне. Наприклад, $\operatorname{Im}(4 - 7i) = -7$.

Будь-яке дійсне число можна розглядати як комплексне число, в якого уявна частина дорівнює 0. Справді, при $\operatorname{Im} z = 0$ маємо $z = x$.

Комплексне число $z = iy$, в якому $\operatorname{Re} z = 0$, називають суто уявним числом.

Означення. Комплексне число $z = x + iy = 0$, тоді і тільки тоді, коли $x = 0$ і $y = 0$.

Означення. Два комплексних числа $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються **спряженими**.

Означення. Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ вважають рівними і записують $z_1 = z_2$, тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$.

Примітка. Хоча ми визначили, що значить $z_1 = z_2$, запис, наприклад, $z_1 < z_2$ не має сенсу, тому що комплексні числа неможна порівнювати!

Приклад. Розв'язати квадратне рівняння: $x^2 - 2x + 10 = 0$.

Розв'язок: Розв'яжемо це квадратне рівняння через дискримінант:

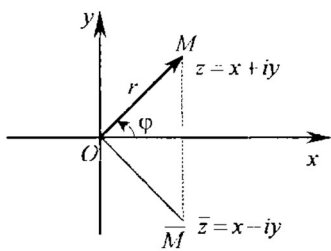
$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 10 = 4 - 40 = -36;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 6 \cdot i}{2} = 1 \pm 3i$$

(нагадаємо, що $i^2 = -1$. Пізніше покажемо, що $\sqrt{-1} = i$ має два значення i і $(-i)$). Отже рівняння $x^2 - 2x + 10 = 0$ має два кореня $x_1 = 1 + 3i$ і $x_2 = 1 - 3i$.

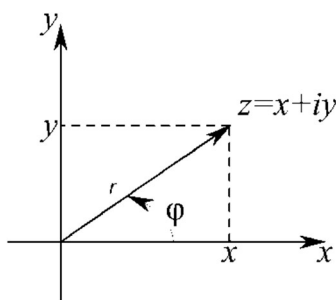
Цей приклад ілюструє теорему в якій стверджується, що якщо многочлен має комплексний корінь, то он має і комплексно спряжений корінь.

Примітка. Число комплексних корнів многочлена с комплексними коефіцієнтами степеня n , враховуючи кратні корні кратну кількість раз, дорівнює n . При цьому, усі чисто комплексні корні (якщо вони є) многочлена с дійсними коефіцієнтами можна розбити на пари спряжених однакової кратності. Таким чином, многочлен парного степеня з дійсними коефіцієнтами може мати тільки парне число дійсних корнів, а непарного степеня - тільки непарне.



Геометрично комплексне число $z = x + iy$ зображується точкою $M(x; y)$ або вектором \overline{OM} . Площина xOy умовно називається комплексною площиною змінної z , вісь Ox - дійсною віссю, вісь Oy - уявною віссю.

Комплексне число, як деяку точку $M(x; y)$ на комплексній площині, можна задати радіус-вектором r і кутом повороту φ цього вектора (тобто полярними координатами).



Існують формули, що зв'язують координати точки в декартовій системі координат з координатами точки в полярній системі координат:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Переходячи до полярних координат отримаємо: $z = x + iy = (r \cos \varphi) + i(r \sin \varphi)$

Таким чином, будь-яке комплексне число може бути записано у вигляді:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (2)$$

де φ вимірюється в радіанах і $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Вираз (2) називають **тригонометричною формою запису комплексного числа**.

Значення r називають **модулем комплексного числа z** . Модуль комплексного числа позначають r або $|z|$ і обчислюють за формулою

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Кут φ , який утворює радіус-вектор з додатним напрямом осі Ox , називають **аргументом** комплексного числа z і позначають $\operatorname{Arg}z$.

Модуль комплексного числа визначається однозначно, а аргумент с точністю до доданку вигляду $2k\pi$, $k \in Z$: $\operatorname{Arg}z = \varphi + 2\pi k$, $k \in Z$. Серед нескінченної множини значень $\operatorname{Arg}z$ є одне значення, яке належить пів інтервалу $(-\pi; \pi]$. Його називають **головним значенням аргументу** і позначають $\operatorname{arg}z$.

Таким чином. $\operatorname{Arg}z = \operatorname{arg}z + 2\pi k$.

З формул $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ випливає, що $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$. Тобто аргумент φ може визначатись із співвідношення $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, з урахуванням того, в якій чверті знаходиться точка $M(x; y)$.

З останнього випливає, що головне значення аргументу обчислюється за формулою:

$$\varphi = \operatorname{arg}z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, (M(x, y) \in I, IV); \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0, (M(x, y) \in II) \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0, (M(x, y) \in III) \\ \frac{\pi}{2}; & x = 0; y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}; & x = 0; y < 0. \end{cases}$$

Використовуючи формулу Ейлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ і формулу тригонометричної записи комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, отримаємо показникову форму комплексного числа z :

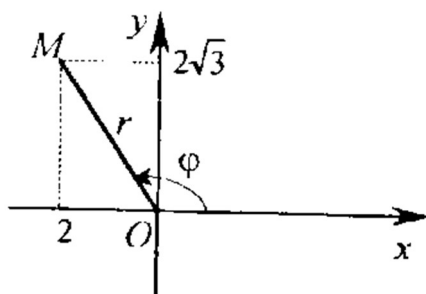
$$z = re^{i\varphi}.$$

Приклад. Для заданого комплексного числа z знайти: 1) дійсну і уявну частини; 2) зобразити число на комплексній площині; 3) знайти модуль і головне значення аргументу; 4) записати це число в тригонометричній та показниковій формі.

$$z = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$1) x = \operatorname{Re} z = -2, \quad y = \operatorname{Im} z = 2\sqrt{3}.$$

2)



$$3) r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \pi + \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{-2} = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

4) тригонометрична форма: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$;

$$z = 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$$

Показникова форма: $z = re^{i\varphi} = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}$

Дії над комплексними числами.

Для комплексних чисел визначені операції додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення числа до натурального степеня, добування кореня n -ого степеня, де $n \in \mathbb{N}$. Результатом цих операцій є комплексні числа.

Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі виконуються таким чином:

- 1) $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- 2) $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.
- 3) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
- 4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, z_2 \neq 0$

Приклад.

$$\frac{3 + 4i}{2 + 5i} = \frac{(3 + 4i) \cdot (2 - 5i)}{(2 + 5i) \cdot (2 - 5i)} = \frac{6 - 15i + 8i - 20i^2}{2^2 - (5i)^2} = \frac{26 - 7i}{29}$$

Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі виконуються за такими правилами:

- 1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- 2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
- 3) $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ - **формула Муавра**.
- 4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Виведемо формулу Муавра. Послідовне застосування формули множення в тригонометричній формі дозволяє знаходити степені комплексного числа.

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

$$z^3 = r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$$

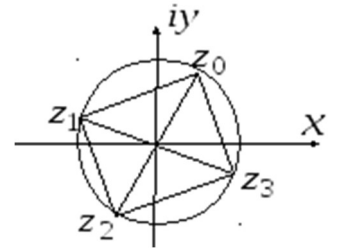
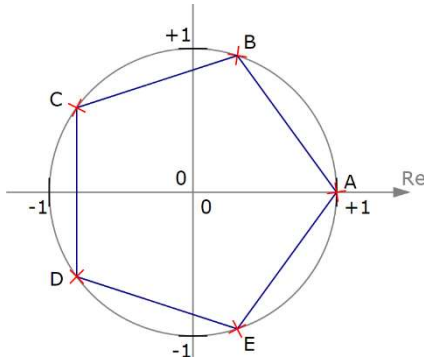
Узагальнюючи отримаємо: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ - **формулу Муавра**.

Правило. Для піднесення комплексного числа до n -го степеня ($n \in \mathbb{N}$) треба модуль піднести до n -го степеня, а аргумент помножити на n .

Означення. Корінь n -го степеня ($n \in \mathbb{N}$) обчислюється за формулою:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k=0,1,2,\dots,(n-1).$$

Зауваження. Корінь n -го степеня з комплексного числа z має n різних значень. Точки, яким відповідають значення $\sqrt[n]{z}$, є вершинами правильного n -кутника, який вписаний в коло радіуса $R = \sqrt[n]{r}$ з центром в початку координат.



Приклад. Знайти усі значення кореня $\sqrt[4]{-1}$.

Рішення.

Зводимо комплексне число z до тригонометричної форми

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Застосовуємо формулу для визначення значень кореня:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k=0,1,2,\dots,(n-1)$$

Тут $z = -1$. Тоді $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$. $\varphi = \pi$.

Тригонометрична форма: $z = \cos \pi + i \sin \pi$.

Значення заданого кореня отримуємо за формулою:

$$z_k = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4}, \quad \text{де } k = 0,1,2,3.$$

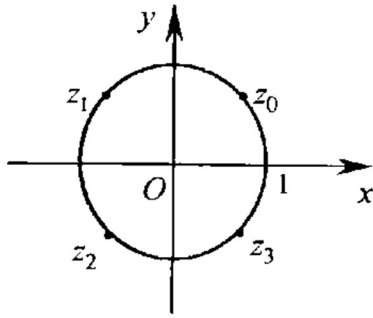
$$k = 0: \quad z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$k = 1: \quad z_1 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$k = 2: \quad z_2 = \cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$k = 3: \quad z_3 = \cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Всі корені знаходяться на колі з центром у точці $z = 0$ і радіус якого дорівнює одиниці, і на однаковій відстані один від одного.



Дії множення, ділення, піднесення до степеня над комплексними числами можна здійснювати і тоді, коли вони задані в показниковій формі.

$$1) z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

$$2) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, z_2 \neq 0.$$

$$3) z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

$$4) \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Застосування комплексних чисел.

За допомогою комплексних чисел можна виводити формули для дійсних чисел.

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi$$

З іншої сторони за формулою Муавра $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$.

$$\text{Тоді } \cos^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi.$$

Прирівняємо дійсні і уявні частини:

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi \quad 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi.$$

Аналогічно можна отримати:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi i \sin \varphi + 3 \cos \varphi i^2 \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$$

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$$

$$\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$$