Лекція 13

Основні теореми диференціального числення.

Означення 9.1 (диференційовності функції в інтервалі). Функцію f називають *диференційовною в інтервалі* $(a;b)$, якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу.

Множину всіх диференційовних в інтервалі $(a;b)$ функцій позначатимемо як $D(a;b)$.

Диференційовним в інтервалі функціям притаманні спільні властивості — теореми про середнє значення.

Теорема 9.1 (Роля). Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$;

3) на кінцях відрізку $[a;b]$ набуває рівних значень $f(a) = f(b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ, у якій похідна функції дорівнює нулеві, тобто

$$f'(\xi) = 0, \xi \in (a;b).$$

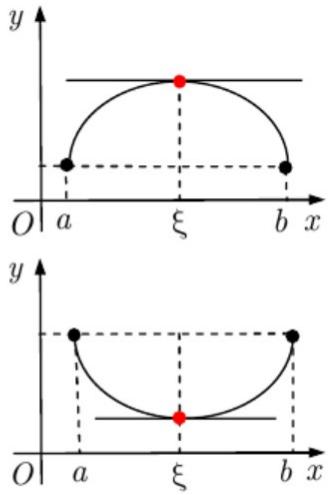

Рис. 9.3. Теорема Роля

Теорема 9.2 (Лаґранжа). Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ така, що

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), a < \xi < b.$$

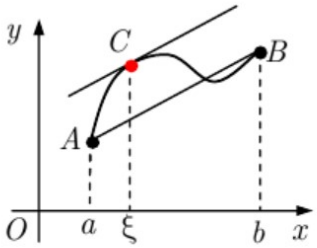

Рис. 9.4. Теорема Лаґранжа

Формулу

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)}$$

ще називають *Лаґранжовою формулою*.

Якщо в Лаґранжовій формулі покласти $a = x_0, b = x_0 + \Delta x$, то вона набуде вигляду

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x, \xi \in \left(x_0; x_0 + \Delta x\right).$$

Оскільки формула дає точний зв'язок приросту функції і приросту аргументу, її ще називають *формулою скінченних приростів* (вказати точку ξ часто не можливо).

Теорема 9.3 (Коші). Якщо функції f і g:

1) неперервні на відрізку $[a;b]$,

2) диференційовні в інтервалі $(a;b)$,

3) похідна $g'(x) \neq 0$ в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < b.$$

Похідна оберненої функції

Теорема про похідну оберненої функції. Якщо функція $y = f(x)$ є строго монотонною на проміжку $(a;b)$ і має у довільній точці x цього проміжку відмінну від нуля похідну $f'(x)$, то обернена їй функція $x = \varphi(y)$ також має похідну у відповідній точці ті при цьому похідна оберненої функції

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Зауваження. Монотонна функція – це функція, приріст якої не змінює знаку, тобто завжди або невід'ємний, або недодатний. Якщо при цьому приріст ще і не дорівнює нулю, то функція називається строго монотонною.

Ця теорема дає можливість отримати **похідні обернених тригонометричних функцій.**

Отримаємо формулу для похідної функції $y = \arcsin x$. Ця функція, визначена на відрізку $[-1;1]$, є оберненою до функції $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Оскільки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $x = \sin y$ монотонно зростає і її похідна

$x'_y = (\sin y)'_y = \cos y > 0 \quad \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то всі умови теореми про похідну оберненої функції виконуються і можна скористатися формулою $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для отримання похідної функції $y = \arccos x$ використаємо тотожність:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Диференціюючи цю тотожність, маємо: $(\arcsin x + \arccos x)' = 0$. Звідси випливає, що $(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$ є оберненою для функції $x = \operatorname{tg} y$, де $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На цьому проміжку $x = \operatorname{tg} y$ монотонно зростає і $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, тобто умови теореми 3.6 виконані. Застосуємо цю теорему:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Похідну функції $y = \operatorname{arcctg} x$ знайдемо, використовуючи тотожність

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Знайдемо похідні від її обох частин. Маємо $(\operatorname{arctg} x)' + (\operatorname{arcctg} x)' = 0$. Звідси знаходимо, що $(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Таким чином, ми отримали формули для похідних обернених тригонометричних функцій:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Похідні вищих порядків

Якщо y' є похідна від функції $y=f(x)$, то похідна від y' називається другою похідною, або похідною другого порядку и позначається y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогічно визначаються похідні будь-якого порядку:

похідна третього порядку $(y'')' = y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$;

похідна n-го порядку: $\left(y^{(n-1)}\right)' = y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$.

Означення *Похідною n–го порядку* функції $y=f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку цієї функції, тобто $y^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'$.

Приклад.

$y=x^5-7x^3+2;$

$y'=5x^4-21x^2,$

$y''=20x^3-42x,$

$y'''=60x^2-42,$

$y^{(4)}=120x,$

$y^{(5)}=120.$

Похідні порядків, вищих, ніж перший, називають *похідними вищих порядків*.

Наведемо формули для похідних n-го порядку деяких елементарних функцій.

1. $\left(x^m\right)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)x^{m-n}$.
2. $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x\cdot\ln^n a$
3. $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.
4. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.
5. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

6. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$.

Розглянемо формулу для похідної двох функцій

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Продиференціюємо її:

$$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + 2u'v' + uv''$$

Обчислимо третю похідну

$$(uv)''' = (u''v + 2u'v' + uv'')' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

Очевидно, що похідні більш високих порядків від добутку двох функцій зберігають структуру, що відповідає формулі бінома Ньютона та загальна формула матиме вигляд:

$(uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$/

Ця формула називається формулою Лейбниця.

Для знаходження похідної n-го порядку добутку функцій $u(x)$ та $v(x)$ використовують формулу Лейбніца:

$$(u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}.$$

Приклад. Знайти похідну $y^{(25)}$ функції $y = x^2\sin x$.

Розв'язання. Застосуємо формулу Лейбніца. Для цього виберемо $u = \sin x$, $v = x^2$. $v' = 2x$, $v'' = 2$. При $k > 2$ $v^{(k)} = 0$. Тому маємо: $(uv)^{(25)} = u^{(25)}v + 25u^{(24)}v' + \dfrac{25\cdot 24}{2!}u^{(23)}v''$.

Враховуючи, що похідні $(\sin x)^{(23)} = \sin\left(x + \dfrac{23\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\cos x$

$(\sin x)^{(24)} = (-\cos x)' = \sin x$,

$(\sin x)^{(25)} = (\sin x)' = \cos x$, отримаємо:

$y^{(25)} = \cos x\cdot x^2 + 50\sin x\cdot x - 600\cos x$.