Невласні інтеграли

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де проміжок інтегрування $[a;b]$ скінченний, а підінтегральна функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, ще називають власним інтегралом.

Якщо будемо брати визначені інтеграли від неперервної функції, але з нескінченним проміжком інтегрування або визначені інтеграли з скінченним проміжком інтегрування, але від функції, що має на цьому проміжку розрив, то будемо мати так звані **невласні інтеграли**.

Невласні інтеграли поділяються на невласні інтеграли I і II роду.

Означення. ***Невласними інтегралами I роду*** називають визначені інтеграли з нескінченними межами інтегрування.

Приклади: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; $\int_{-\infty}^{0} \cos x dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Обчислення невласного інтеграла здійснюється за допомогою граничного переходу:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

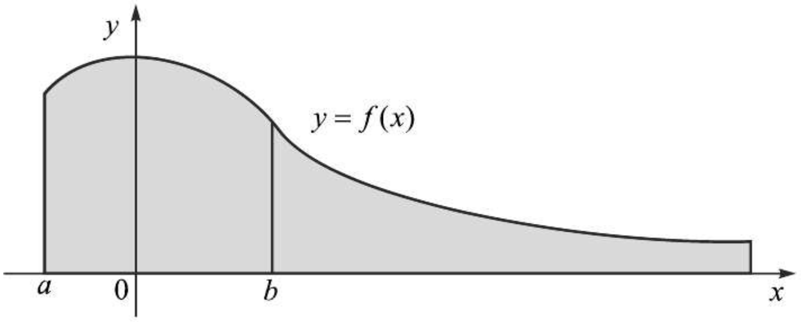
У випадку, коли ця границя є число скінченне, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається **збіжним**, а підінтегральна функція $f(x)$ інтегрованою на проміжку $[a;+\infty)$. А якщо ця границя є нескінченна або не існує, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається **розбіжним**, а функція $f(x)$ неінтегрованою на проміжку $[a;+\infty)$. Кажуть також, що інтеграл збіжний або розбіжний.

Аналогічно можна дати означення невласного інтеграла на проміжку $(-\infty;b]$.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (2).$$

Геометричний зміст невласного інтегралу I роду.

Якщо функція $f(x)$ є неперервною і невід'ємною на проміжку $[a;+\infty)$, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то він дорівнює площі необмеженої області, що видно з рис.



Можна казати, що невизначений інтеграл дорівнює площині нескінченно довгої трапеції.

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$ та інтегрована на будь-якому відрізку $[a;b]$, де a і b – довільні дійсні числа, то можна визначити невласний інтеграл з двома нескінченними межами, припустивши

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx,$$

де c – довільне дійсне число.

Інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx$ збігається тоді і тільки тоді, коли обидва інтеграли $\int\limits_{-\infty}^{c} f\left(x\right)dx$ і $\int\limits_{c}^{+\infty} f\left(x\right)dx$ збігаються. При цьому інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx$ не залежить від вибору числа c.

Формула Ньютона–Лейбніца для невласних інтегралів із нескінченними межами інтегрування

Нехай первісна функція $F(x)$ для функції $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$, а сама функція $f(x)$ є неперервною на будь-якому відрізку $[a;b]$, де b – довільне дійсне число. Тоді для обчислення $\int\limits_a^b f(x)dx$ можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Тут $F(a)$ – стале число та $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ буде існувати тільки тоді, коли існує границя $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$. Введемо позначення $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty)$. Тоді

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a)) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{b\to+\infty} F(a) = F(+\infty) - F(a).$$

Отже, дістаємо формулу Ньютона-Лейбніца для невласних інтегралів

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

Аналогічно можна записати

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{b},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Приклад. Обчисліть невласні інтеграли або встановити їх збіжність:

1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-2}dx = -\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^b = -\left(0-1\right) = 1.$

   Інтеграл збігається.

2. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\ln b - \ln 1 = \lim\limits_{b\to\infty}\ln b - 0 = \infty$. Інтеграл розбігається.

1. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

Розв'язання.

Спочатку виділимо в знаменнику підінтегральної функції повний квадрат і розіб'ємо інтеграл на суму двох інтегралів, тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{(x+3)^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(x+3)\big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(x+3)\big|_0^b =$$

$$= \operatorname{arctg}3 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}3 = \pi,$$

оскільки $\lim\limits_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ і $\lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

2. Обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{\infty} x\cos x dx$.

Розв'язання.

За означенням

$$\int\limits_{0}^{\infty} x\cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} x\cos x dx.$$

Поклавши $u = x$, $dv = \cos x dx$ та інтегруючи частинами під знаком границі, одержуємо

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b} x\cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\left(x\sin\big|_0^b - \int\limits_{0}^{b}\sin x dx\right) = \lim_{b\to+\infty}(b\sin b + \cos b - 1).$$

Оскільки $\lim\limits_{b\to+\infty}\cos b$ не існує, то інтеграл $\int\limits_{0}^{\infty} x\sin x dx$ є розбіжним.

При розгляданні невласних інтегралів перш за все треба з’ясувати питання про збіжність невласного інтеграла. Більше того, у багатьох задачах, пов’язаних з невласними інтегралами, немає необхідності в їх обчисленні, а достатньо знати, збіжний інтеграл чи ні.

Для розв’язання питання про збіжність невласного інтеграла використовуються наступні ознаки збіжності.

Теорема 1. (ознака порівняння). Нехай при $a \le x < +\infty$ виконується умова:

$$0 \le f(x) \le g(x).$$

Тоді: якщо $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$;

якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається, то розбігається і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}$.

Розв'язок. При $x \geq 1$ маємо $\frac{1}{x^2\left(1+3^x\right)} < \frac{1}{x^2}$. Але інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ збігається (дивись приклад 1).

Отже, інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}$ також збігається і його значення менше 1.

Теорема 2. (гранична ознака порівняння). Нехай при $a \leq x < +\infty$ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ і існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, тоді інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$.

Розв'язок. Інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ збігається (дивись приклад 1).

Обчислимо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1$.

Маємо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 > 0$ тому інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Отже, інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$ збігається.

Примітка. Введені ознаки збіжності виконуються за умови, що підінтегральні функції невід'ємні (додатні).

У випадку знакозмінної підінтегральної функції має місце така ознака збіжності.

Теорема 3. (достатня ознака збіжності невласного інтеграла від знакозмінної функції). Якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left|f(x)\right|dx$, то збігається і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Означення. Невласний інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Означення. Невласний інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ називається умовно збіжним, якщо він збігається, а інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ розбігається.

Практичні рекомендації:

1. При використанні ознак порівняння для вияснення питання про збіжність за інтеграл, з яким здійснюється порівняння, береться інтеграл вигляду $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $p \in \mathbb{R}$, для якого має місце твердження:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \begin{cases} \textit{збігається, якщо } \ p > 1 \\ \textit{розбігається, якщо } \ p \le 1 \end{cases}.$$

Такі ж властивості має інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $a > 0$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграли:

Інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається ($p > 1$).

Інтеграл $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^5}$ збігається ($p > 1$).

Інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ розбігається ($p = \frac{1}{2} < 1$).

Інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ розбігається ($p = \frac{1}{3} < 1$).

2. Якщо підінтегральна функція в інтегралі $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ має вигляд $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m < n)$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ - раціональні або ірраціональні

многочлени, то для дослідження невласний інтеграл І-го роду порівнюють з еталонним інтегралом $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{n-m}}$.

3. Якщо підінтегральна функція $f(x)$ – містить трансцендентні функції, то використовуються методи порівняння. При цьому важливо пам'ятати такі оцінки:

$$|\sin x| \le 1,\ |\cos x| \le 1,\ |\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2};\ \ln x < x^{a}\left(a > 0\right) \text{ при } x \to \infty .$$

Приклад.

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + \sqrt{x}} dx .$$

Розв'язання.

Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + \sqrt{x}}$ змінює знак разом із зміною знака чисельника. Дослідимо збіжність інтеграла $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2 + \sqrt{x}} dx$. Оскільки $0 < \frac{|\sin x|}{x^2 + \sqrt{x}} < \frac{1}{x^2}$, а інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ є збіжним, то за ознакою порівняння (теорема 1) інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ збігається абсолютно.

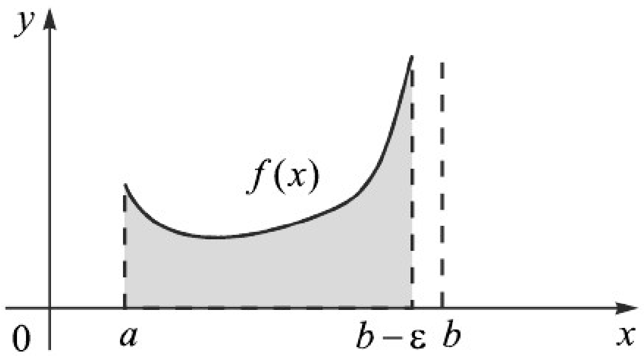
Невласні інтеграли другого роду (інтеграли від необмежених функцій)

Означення. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b)$ і має нескінченний розрив при $x=b$ (в точці $x=b$ функція необмежена). Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то її називають ***невласним інтегралом другого роду*** (інтегралом від необмеженої функції) і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таким чином, за означенням

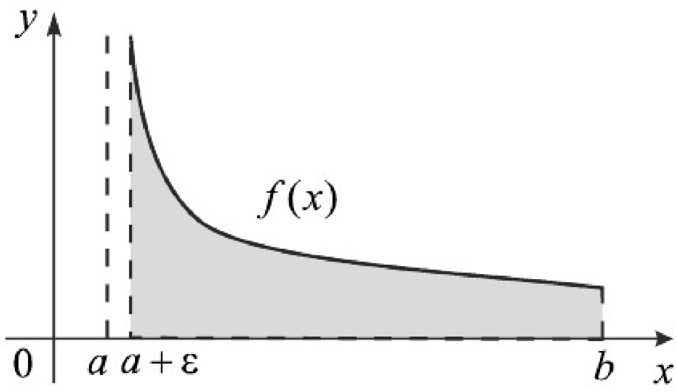
$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Якщо границя в правій частині існує, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ **збігається**. Якщо вказана границя не існує або нескінченна, то говорять, що інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ **розбігається**.



Аналогічно, якщо функція має нескінченний розрив в точці $x=a$, то вважають

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

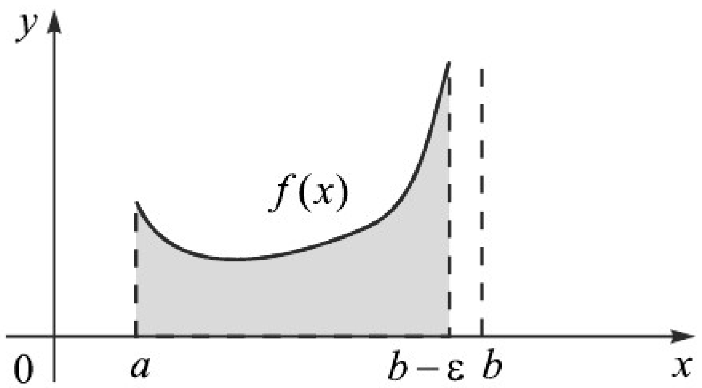


Якщо функція $f(x)$ має розрив у внутрішній точці c відрізка $[a;b]$, то невласний інтеграл другого роду визначається формулою

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Цій невласний інтеграл вважається збіжним, якщо збігаються обидва невласних інтеграла.

Геометричний зміст невласного інтегралу другого роду. У випадку, коли $f(x) > 0$, невласний інтеграл другого роду $\int_a^b f(x)dx$ (розрив в точці $x = b$) можна трактувати як площину нескінченно високої криволінійної трапеції.



Приклад. Обчислити $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Розв'язок. При $x = 0$ функція $y = \frac{1}{x^2}$ має нескінчений розрив.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x}\bigg|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1 - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty .$$

Інтеграл розбігається.

Ознаки збіжності для невласних інтегралів другого роду.

Теорема. (ознака порівняння невласних інтегралів другого роду). Нехай на відрізку $[a;b)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні, при $x = b$ мають нескінчений розрив і виконується умова $0 \le f(x) \le g(x)$.

Тоді: якщо $\int_a^b g(x)dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int_a^b f(x)dx$;

якщо $\int_a^b f(x)dx$ розбігається, то розбігається і інтеграл $\int_a^b g(x)dx$.

Теорема 2. (гранична ознака порівняння невласних інтегралів другого роду). Нехай на відрізку $[a;b)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні, при $x=b$ мають нескінчений розрив. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k>0$, тоді інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ та $\int_a^b g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад. Дослідити на збіжність $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sin x}$.

Розв'язок. Функція $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}$ має на відрізку $[0;1]$ один розрив в точці $x=0$.

Розглянемо функцію $g(x)=\dfrac{1}{x}$. Інтеграл $\int_0^1 \dfrac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^1 \dfrac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\ln x\Big|_\varepsilon^1=0-\lim\limits_{\varepsilon\to0}\ln\varepsilon$.

Отже інтеграл від функції $g(x)=\dfrac{1}{x}$ розбігається.

Оскільки $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, то інтеграл $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sin x}$ також розбігається.