

Тема: «Диференціальне числення функцій»

1. Похідна функції

Похідна функції – є одним з найважливіших понять у математиці. Похідна широко використовується в ході розв’язання цілого ряду задач математики, фізики, інших наук, особливо при вивченні швидкості різних процесів.

Процес знаходження похідної називається диференціюванням. Обернена операція відновлення функції за відомою похідною – називається інтегруванням.

Похідна функції в деякій точці характеризує швидкість зміни значень функції в точці.

Означення. Нехай в деякому околі точки x_0 визначена функція $y = f(x)$.

Похідною функції в точці x_0 називається границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (границя відношення приросту функції до приросту аргументу Δx , коли приріст Δx прямує до нуля). Похідна існує, якщо існує ця границя.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Похідна функції позначається y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$.

Зауваження 1. Якщо в деякій точці x границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то похідну $f'(x)$ в цій точці називають нескінченною.

Зауваження 2. Якщо в деякій точці x границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не існує, то не існує в цій точці і похідної $f'(x)$.

Зауваження 3. Похідна функції при певному значенні $x = x_0$ - якщо існує – є певне число, що дорівнює швидкості змінення функції в цій точці. Якщо похідна існує на деякому інтервалі $(a; b)$, то похідна є функція від x .

Односторонні (однобічні) похідні

Розглянемо поняття односторонньої похідної. Односторонні похідні визначаються за допомогою односторонніх границь.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена у околі точки x . Границю відношення приросту функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ до приросту аргументу Δx , якщо $\Delta x \rightarrow 0$ і при цьому $\Delta x > 0$, називають **правою похідною** від функції $f(x)$ у точці x і позначають $f'_+(x)$:

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена у околі точки x . Границю відношення приросту функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ до приросту аргументу Δx , якщо $\Delta x \rightarrow 0$ і при цьому $\Delta x < 0$, називають **лівою похідною** від функції $f(x)$ у точці x і позначають $f'_-(x)$:

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a, b]$, то під похідною у точці $x = a$ розуміють праву похідну, а у точці $x = b$ – ліву.

З означення похідної випливає, що похідна $f'(x)$ у точці $x = x_0$ існує тоді і тільки тоді, коли у цій точці існують ліва та права похідні і вони рівні між собою: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. Якщо ж $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то похідна у цій точці не існує. Не існує похідної і у точках розриву функції $f(x)$.

Приклад. Довести, що функція $y = |x|$ не має похідної у точці $x = 0$.

Розв'язання. Приріст функції $y = |x|$ у точці $x = 0$, що відповідає приросту

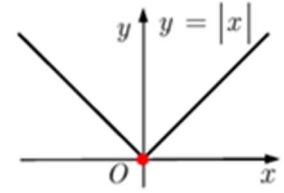
аргументу Δx , $\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Це відношення дорівнює -1 при $\Delta x < 0$ і дорівнює 1

при $\Delta x > 0$. Тому границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ залежить від знаку

Δx : вона дорівнює 1 при $\Delta x > 0$ і -1 при $\Delta x < 0$. Таким чином, у точці $x = 0$ існують односторонні похідні

$f'_-(0) = -1$ та $f'_+(0) = 1$, але $f'_-(0) \neq f'_+(0)$.



Це означає, що у точці $x = 0$ похідна функції $y = |x|$ не існує.

Користуючись поняттям односторонніх границь функції, дістаємо:

Теорема (критерій існування скінченної похідної). У точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0)$ тоді й лише тоді, коли існують скінченні права та ліва похідні і ці похідні рівні між собою

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0).$$

Знаходження похідної функції в точці

Дію відшукування похідної функції f називають *диференціюванням*. Щоб знайти похідну від заданої функції $f(x)$, $x \in X$, за означенням, треба:

1) надаючи фіксованому аргументові $x \in D(f)$ приріст Δx , обчислити значення функції $f(x + \Delta x)$;

2) знайти відповідний приріст функції

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) утворити відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) знайти границю цього відношення, коли $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Приклад. Користаючись означенням похідної, знайти похідну функції $y = x^2$

Розв'язання.

Надамо аргументу x приросту Δx і обчислимо приріст Δy :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Висновок. Для $y = x^2$ похідна $f'(x) = 2x$.

Теорема (критерій диференційовності). Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0) = A$.

Теорема (необхідна умова диференційовності). Якщо функція диференційовна в деякій точці, то вона й неперервна в цій точці.

Зворотне твердження неправдиве: з неперервності функції f у деякій точці не випливає диференційовність її в цій точці.

Приміром, функція $y = |x|$ неперервна в точці $x_0 = 0$, але не має похідної в цій точці, а, отже, не є диференційовною.

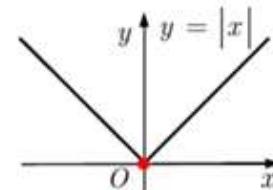
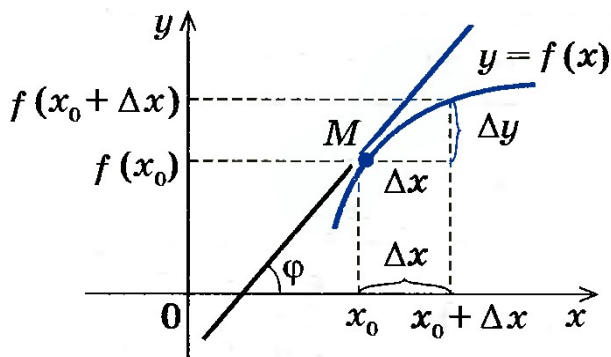


Рис. Приклад неперервної недиференційовної функції в точці $x_0 = 0$

2. Геометричний зміст похідної.



За означенням похідна - це

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Геометрично похідна представляє собою кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x , тобто $y'(x_0) = tg\varphi$.

Похідна є швидкість змінення функції $y = f(x)$ в точці x_0 .

Похідні за часом є одним з ключових понять у фізиці. Наприклад, для радіус-вектора, похідна за часом - це його швидкість, а друга похідна за часом - це його прискорення. Третя похідна за часом відома як ривок.

Велике число рівнянь у фізиці є похідним за часом від вектору.

Багато інших фундаментальних величин в науці співвідносяться як похідні за часом один від одного:

- сила є похідною за часом від імпульсу
- потужність є похідною за часом від енергії
- електричний струм є похідним за часом від електричного заряду

3. Таблиця похідних основних елементарних функцій: (треба вивчити напам'ять!)

1) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	7) $(\cos x)' = -\sin x$	13) $(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
2) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	8) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	14) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
3) $(e^x)' = e^x$	9) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	15) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	10) $(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	16) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	11) $(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	17) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
6) $(\sin x)' = \cos x$	12) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	

4. Основні правила диференціювання

Нехай $C - const$, $u = u(x)$, $v = v(x)$, тоді:

1. $C' = 0$ (Похідна сталої дорівнює нулю).
2. $(Cu)' = C(u)'$ (Сталий множник можна виносити за знак похідної).
3. Якщо існують похідні $u'(x)$ и $v'(x)$, то похідна від суми (різниці) функцій $u(x)$ и $v(x)$ дорівнює $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
5. $(u \cdot v \cdot w \cdot \dots \cdot z)' = u' \cdot v \cdot w \cdot \dots \cdot z + u \cdot v' \cdot w \cdot \dots \cdot z + u \cdot v \cdot w' \cdot \dots \cdot z + \dots + u \cdot v \cdot w \cdot \dots \cdot z'$
6. Якщо існують похідні $u'(x)$ и $v'(x)$ і $v \neq 0$, то похідна від частки цих функцій $u(x)$ и $v(x)$ дорівнює

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Приклади:

$$1) (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x;$$

$$2) (3 \ln x)' = 3 \cdot (\ln x)' = 3 \cdot \frac{1}{x};$$

$$3) (x \cdot e^x)' = x' \cdot e^x + x(e^x)' = e^x + x \cdot e^x;$$

$$4) \left(\frac{x^2}{\operatorname{tg} x}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot \operatorname{tg} x - x^2(\operatorname{tg} x)'}{(\operatorname{tg} x)^2} = \frac{2x \operatorname{tg} x - x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x};$$

- 7. Теорема (про похідну складеної функції).** Якщо складена функція $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, і функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x , і функція $y = f(u)$ має похідну f'_u у відповідній точці u , то складена функція має похідну за формулою $(f(u))'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Практичне правило. Для знаходження похідної складеної функції необхідно похідну даної функції за проміжним аргументом f'_u помножити на похідну внутрішньої функції u'_x .

$$\begin{aligned}
 5) \left(\sqrt{e^{2x} + \cos^2 x} \right)' &= \left[\left(e^{2x} + \cos^2 x \right)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{2x} + \cos^2 x \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(e^{2x} + \cos^2 x \right)' = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(e^{2x} + \cos^2 x \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(e^{2x} (2x)' + 2 \cos x (-\sin x) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^{2x} + \cos^2 x}} \cdot (e^{2x} \cdot 2x - 2 \cos x \sin x).
 \end{aligned}$$

Формули диференціювання основних функцій:

1) $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	8) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	14) $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
2) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	9) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	15) $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
3) $(e^u)' = e^u \cdot u'$	10) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	16) $(\operatorname{th} u)' = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$
4) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	11) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	17) $(\operatorname{cth} u)' = \frac{-u'}{\operatorname{sh}^2 u}$
5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	12) $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	
6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	13) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$	
7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$		

5. Логарифмічне диференціювання

Іноді під час знаходження похідної доцільно задану функцію спочатку логарифмувати, і тільки потім знайти похідну. Така операція називається логарифмічним диференціюванням.

Якщо треба знайти y' з рівняння $y = f(x)$, то можна:

а) логарифмувати обидві частини рівняння

$$\ln y = \ln f(x) = \varphi(x);$$

б) диференціювати обидві частини отриманої рівності, де $\ln y$ є складена функція від x ,

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x) \Rightarrow y' = y \cdot \varphi'(x).$$

в) замінити y його виразом через x

$$y' = f(x) \cdot \varphi'(x).$$

Приклад: $y = x^x$

$$а) \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x;$$

$$б) (\ln y)' = (x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = x' \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1);$$

$$в) \text{За умовами задачі } y = x^x, \text{ тому } y' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

Зауваження. Даний підхід також використовують, якщо функція містить кілька співмножників. Тоді, користуючись властивостями логарифмів, можна в простій формі записати результат логарифмування.

6. Диференціювання неявно заданої функції

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно y , то функція називається заданою в явному вигляді. Якщо ж функція задана у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно y , то говорять, що **функція задана неявно**.

Будь-яку явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявно задану рівнянням $y - f(x) = 0$, але не навпаки. Іноді неможливо розв'язати рівняння відносно y . Наприклад, $5^{xy} - \sin(xy) + e^{x+y} - 7 = 0$.

Щоб про диференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x , і одержане рівняння розв'язати відносно y' . Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y .

Приклад: Знайти похідну неявної функції $e^{y-x} = y^2$.

$$e^{y-x} - y^2 = 0$$

$$(e^{y-x} - y^2)' = (0)'$$

$$e^{y-x} \cdot (y' - 1) - 2y \cdot y' = 0$$

$$e^{y-x} \cdot y' - e^{y-x} - 2y \cdot y' = 0$$

$$e^{y-x} \cdot y' - 2y \cdot y' = e^{y-x}$$

$$y' \cdot (e^{y-x} - 2y) = e^{y-x}$$

$$y' = \frac{e^{y-x}}{e^{y-x} - 2y}$$

7. Диференціювання функцій, що задані параметрично

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, де t

- допоміжна змінна, яка називається параметром. Похідну знаходять за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад.

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(3t^5 + 5t^3 + 1)'}{(t^3 + 3t + 1)'} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = \frac{15t^2(t^2 + 1)}{3(t^2 + 1)} = 5t^2$$