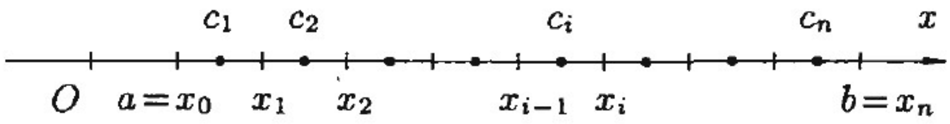
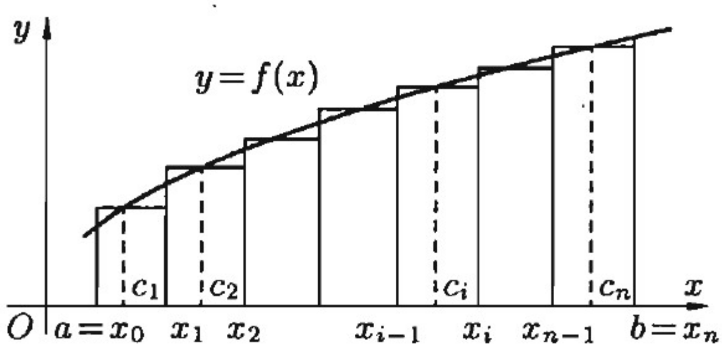
Визначений інтеграл

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Виконаємо наступні дії:

1. За допомогою точок $x_0 = a,\ x_1, x_2, ...,\ x_n = b$ розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частинних відрізків.



2. В кожному частинному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1,2,...n$ виберімо довільну точку c_i , $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ і обчислимо в ній значення функції, тобто величину $f(c_i)$.
3. Помножимо знайдене значення функції $f(c_i)$ на довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ відповідного частинного відрізка: $f(c_i)\cdot \Delta x_i$.



4. Складемо суму S_n усіх таких добутків:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad (1)$$

Сума вигляду (1) називається **інтегральною сумою** функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Позначимо через λ довжину найбільшого частинного відрізка: $\lambda = \max \Delta x_i \ (i = 1,2,...,n)$.

5. Знайдемо границю інтегральної суми (1), коли $n \to \infty$ так, що $\lambda \to 0$.

Якщо при цьому інтегральна сума S_n має границю I, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частинні відрізки, ні від вибору точок в них, то число I **називається визначеним інтегралом від функції** $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається $\int_a^b f(x)dx$. Таким чином,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad (2).$$

Число a називається ***нижньою*** границею інтегрування, число b – ***верхньою*** границею інтегрування, $f(x)$- **підінтегральною функцією**, відрізок $[a;b]$ – ***областю*** (***відрізком***) ***інтегрування***, x – *змінна інтегрування*.

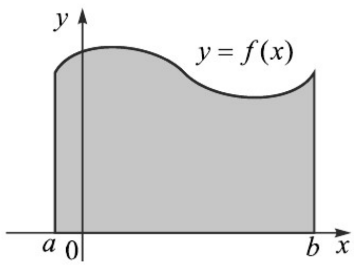
Якщо існує скінченна границя I, то функція $f(x)$ називається ***інтегрованою*** на відрізку $[a;b]$.

Має місце наступна теорема існування визначеного інтеграла:

Теорема (Коші). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку*.

Геометрична інтерпретація визначеного інтегралу.

Якщо $f(x) > 0$ на відрізку $[a;b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ с геометричної точки зору представляє собою площину *криволінійної трапеції* $aABb$ – фігури, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$.



$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y dx$$

Визначений інтеграл, як площина криволінійної трапеції не залежить від позначення змінної інтегрування, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \quad .$$

Розглянемо **основні властивості визначеного інтеграла**.

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

3. $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx$, де A – стала.

4. $\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$.

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, для будь-яких чисел a, b, c, $a < c < b$.

6. Якщо $m < f(x) < M$ на $[a;b]$, то $m(b-a) < \int\limits_a^b f(x)dx < M(b-a)$.

7. Якщо $f(x)$ непарна функція, тобто $f(-x) = -f(x)$, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$.

8. Якщо $f(x)$ парна функція, тобто $f(-x) = f(x)$, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$.

Обчислення визначеного інтегралу

Формула Ньютона–Лейбніца. Обчислення визначеного інтегралу безпосередньо за означенням (за допомогою інтегральної суми) навіть для простих функцій приводить к складним обчисленням. Тому для цієї мети застосовують формулу, яка називається формулою Ньютона–Лейбніца. (В.Г.Лейбниць (1646–1716) – відомий німецький філософ і математик. І.Ньютон (1642–1727) – англійський фізик і математик. Цим вченим належить заслуга створення диференціального і інтегрального обчислення).

Формула Ньютона–Лейбніца:

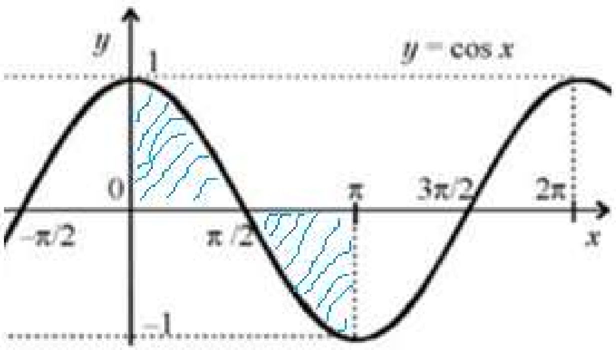
$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

- *визначений інтеграл дорівнює різниці значень невизначеного інтегралу при верхньої і нижньої границях інтегрування*.

Приклад 1. $\int_2^3 3x^2dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = x^3\Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$

Приклад 2. $\int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$.

Чи можна стверджувати, що в цьому прикладі площина дорівнює 0?



$$S = S_1 + S_2 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\right| = \sin x\Big|_0^{\pi/2} + \left|\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right| =$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) + \left|\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 + 1 = 2$$

Методи обчислення визначеного інтегралу

1. Заміна змінної. Нехай дано інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Введем нову змінну $x = \varphi(t)$.

Якщо 1) $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$;

2) $\varphi(t)$ *и* $\varphi'(t)$ *неперервні на відрізку* $[\alpha,\beta]$;

3) $f[\varphi(t)]$ *визначена і неперервна на відрізку* $[\alpha,\beta]$,

то $$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt. \qquad (3)$$

Відмітимо, що при обчисленні визначеного інтегралу за формулою (3) повернення до начальної змінної не виконується. Визначений інтеграл в правій частині рівності (3) дорівнює деякому числу. Цьому же числу дорівнює і інтеграл, що стоїть і лівій частині рівності (3).

Приклад 3.

$$\int_2^3 24(6x-11)^3\,dx = \left| \begin{array}{ll} t=6x-11 & t_1=6\cdot 2-11=1 \\ dt=6dx & t_2=6\cdot 3-11=7 \\ \frac{1}{6}dt=dx & \end{array} \right| = \int_1^7 24t^3\cdot\frac{1}{6}dt = \int_1^7 4t^3dt = t^4\Big|_1^7 = 2401-1=2400$$

Приклад 4.

$$\int_0^{\pi/6} \sin^3 x\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} t=\sin x & t_1=\sin 0=0 \\ dt=\cos x dx & t_2=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \end{array} \right| = \int_0^{1/2} t^3dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4-0^4\right) = \frac{1}{64}$$

2. **Інтегрування частинами.** Формула інтегрування частинами для визначеного інтегралу має вигляд:

$$\int_a^b u\ dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \quad . \tag{4}$$

Приклад 5.

$$\int_0^{\pi/6} x\cos x dx = \left| \begin{array}{c} u=x \\ du=(x)'\,dx=dx \\ dv=\cos x dx \\ v=\int\cos x dx=\sin x \end{array} \right| = x\sin x\Big|_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6}\sin x dx = x\sin x\Big|_0^{\pi/6} + \cos x\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}.$$

Приклад 6.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = \left| \begin{array}{c} u = \arcsin x \\ du = \left(\arcsin x\right)' dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx \\ v = \int dx = x \end{array} \right| = x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

3. Спрощення інтегралів у симетричних межах інтегрування.

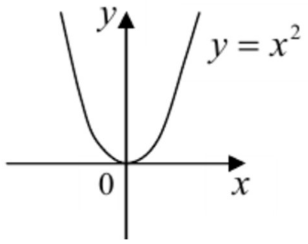
Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[-a;a]$ є:

а) парною, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$;

б) непарною, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

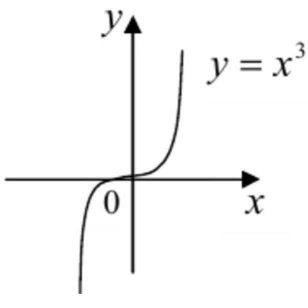
$$\int_{-5}^{5} x^2 dx = 2\int_0^5 x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^5 = 2\cdot\frac{5^3}{3}.$$

функція парна

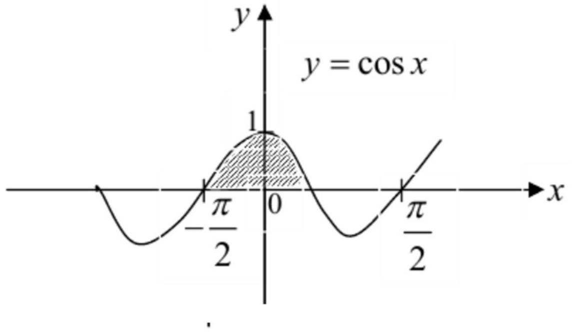


$$\int_{-7}^{7} x^3 dx = 0$$

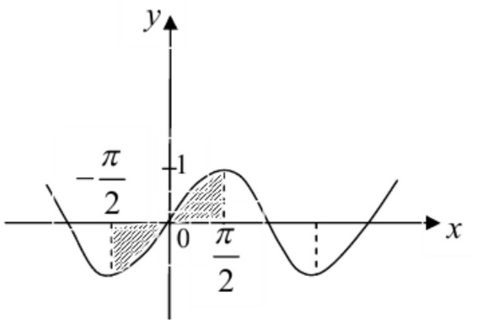
функція непарна



$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos x}_{\text{функція парна}} dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$



$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin x}_{\text{функція непарна}} dx = 0$$

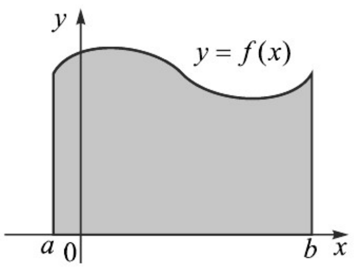


Геометричні застосування визначеного інтегралу.

Обчислення площі, якщо крива задана в декартових координатах.

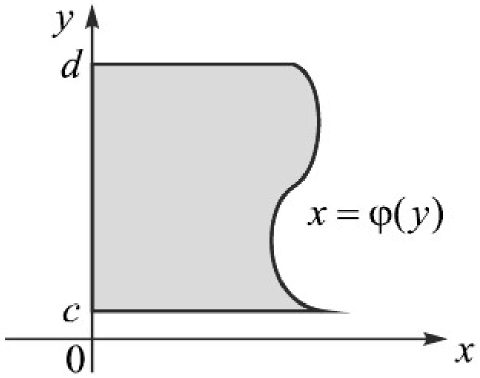
Виходячи з геометричного змісту визначеного інтеграла, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ є неперервною та набуває додатних значень, площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізками прямих $x=a$, $x=b$, $y=0$ і дугою кривої $y=f(x)$, дорівнює

$$S=\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{b} ydx$$



Якщо крива задана рівнянням $x=\varphi(y)$, де функція $\varphi(y)$ на відрізку $[c;d]$ є неперервною та набуває на цьому відрізку додатних значень, то площа фігури, обмеженої відрізками прямих $y=c$, $y=d$, $x=0$ і дугою кривої $x=\varphi(y)$, обчислюється за формулою

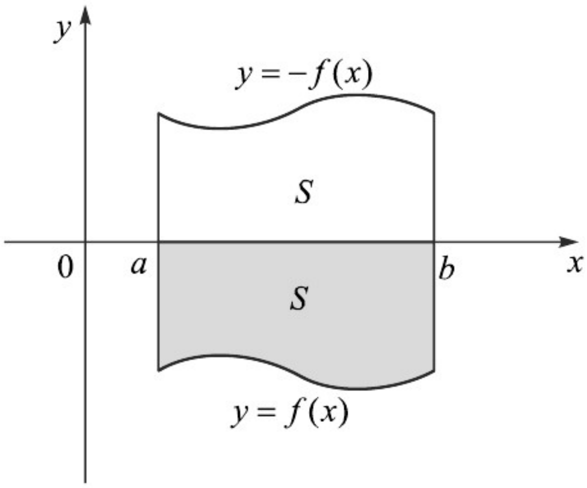
$$S = \int_c^d \varphi(y)dy = \int_c^d xdy.$$



Якщо $f(x)$ на $[a;b]$ є неперервною, але знакозмінною функцією, то фігура, обмежена кривою $y = f(x)$ та відрізками прямих $x = a$, $x = b$, вже не є криволінійною трапецією.

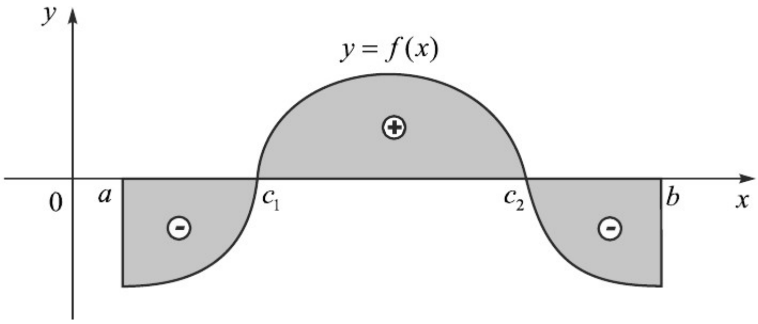
Розглянемо окремі випадки.

1. Якщо $f(x) \le 0$ на $[a;b]$, то площа фігури, обмеженої такою кривою та прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, дорівнюватиме площі криволінійної трапеції, яка зверху обмежена кривою $-f(x) \ge 0$.



Тоді $S = -\int_a^b f(x)dx$ або $S = \int_a^b | f(x) | dx$

Ця формула залишається справедливою, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ декілька разів змінює знак.



Тоді площу такої фігури можна обчислити за формулою:

$$S=-\int_{a}^{c_1} f(x)dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx-\int_{c_2}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{b}|f(x)|dx.$$

2. Якщо фігура обмежена прямими $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, причому $y_1(x)\le y_2(x)$ і $y_1(x)\ge 0$ на $[a;b]$ (рис.11.5), тоді її площа дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій, обмежених прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$, а зверху кривими $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$

$$S=\int_{a}^{b} f_2(x)dx-\int_{a}^{b} f_1(x)dx,$$

або

$$S=\int_{a}^{b}\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$

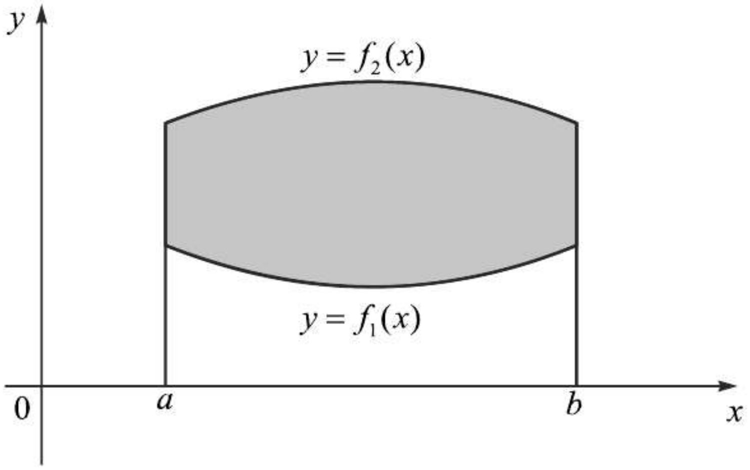


Рисунок 11.5

В загальному випадку, коли фігура обмежена зверху та знизу кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, де $f_1(x)$ і $f_2(x)$ – неперервні, але знакозмінні на відрізку $[a;b]$ функції, то площу такої фігури можна записати так:

$$S = \int_a^b | f_2(x) - f_1(x) | \, dx .$$

3. В окремих випадках ліва межа $x = a$ (або права межа $x = b$) може перетворитися в точку перетину кривих $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ (рис. 11.6). В цих випадках межі інтегрування a та b знаходяться як абсциси точок перетину заданих кривих.

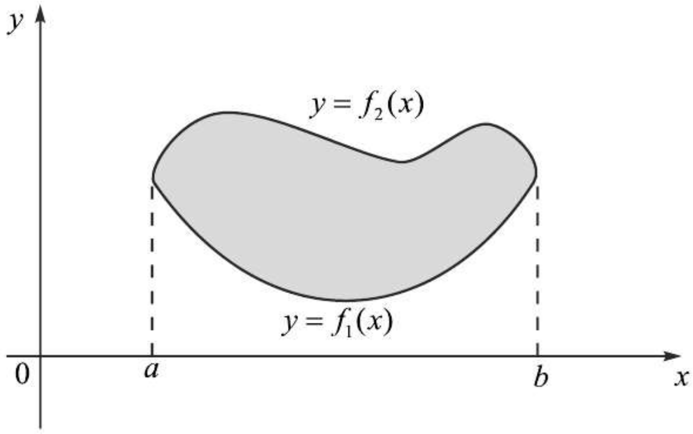
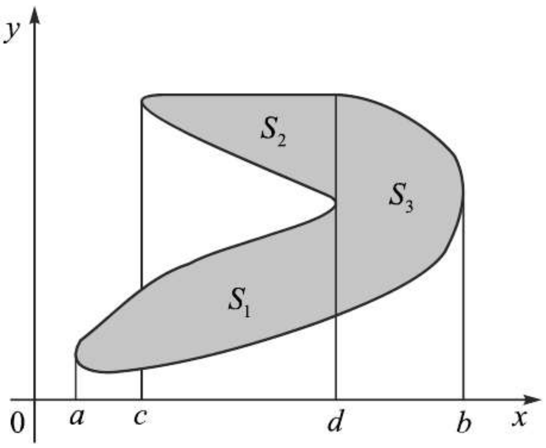


Рисунок 11.6

4. Якщо фігура має складнішу форму, ніж розглянуті, то прямими, паралельними осі Oy або осі Ox, її треба розбити на скінченну суму або різницю криволінійних трапецій (рис. 11.7). Тоді площа такої фігури дорівнюватиме алгебраїчній сумі площ утворених трапецій, тобто $S = S_1 + S_2 + S_3$.



Приклади.

1. Обчислити площу фігури, обмеженої прямими $x=0$, $x=2$ та кривими $y=2^x$, $y=2x-x^2$.

Розв'язання.

Оскільки функція $y=2x-x^2$ досягає максимуму в точці $x=1$, а функція $y=2^x \geq 1$ на відрізку $\left[0;2\right]$, тобто $2^x \geq 2x-x^2$ на $\left[0;2\right]$, то

$$S=\int_0^2 [2^x-(2x-x^2)]dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^2-(x^2-\frac{x^3}{3})\Bigg|_0^2=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}.$$

2. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y=x+1$, $y=\cos x$ і віссю Ox.

Розв'язання.

Зобразимо цю фігуру (рис.11.8).

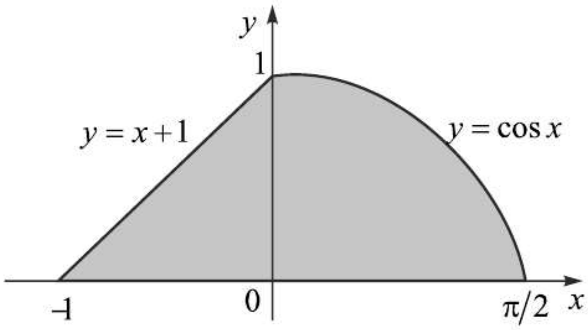


Рисунок 11.8

Функція $y=f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 0, \\ \cos x, & \text{якщо } 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ є неперервною на відрізку $\left[-1;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Площа цієї криволінійної трапеції дорівнює

$$S=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^0+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}.$$