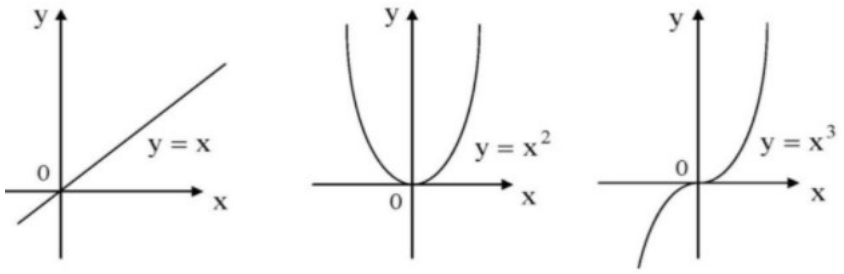
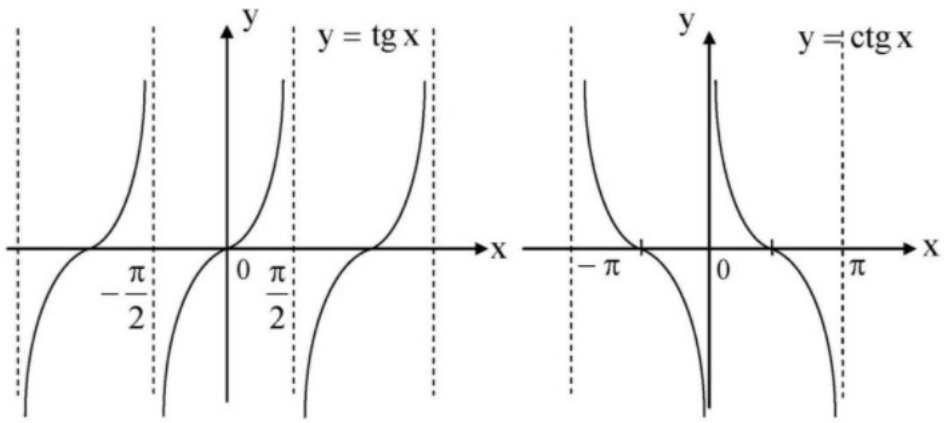
Лекція 11

Неперервність функції.
Точки розриву та їх класифікація.

Приклади неперервних функцій:



Приклади функцій, що мають розриви:



Означення 1. Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x = x_0$, якщо границя функції в точці x_0 існує і дорівнює значенню функції в цій точці:

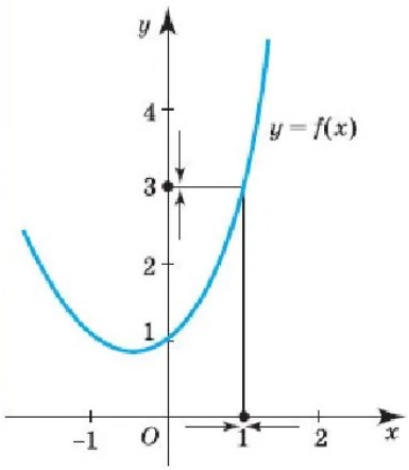
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

За цим означенням неперервність функції $f(x)$ в точці x_0 означає виконання таких умов:

1) функція $f(x)$ повинна бути визначена в точці x_0;

2) для функції $f(x)$ повинна існувати границя в точці x_0;

3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 збігається із значенням функції в цій точці.



Врахуємо, що: якщо в точці x_0 існує границя функції $y = f(x)$, то існують границі функції в точці x_0 зліва и справа і вони рівні:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Тоді рівність (1) можна записати так:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Таким чином, можна дати наступне означення неперервності функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Означення 2 (неперервності функції в точці). Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо вона має односторонні границі в цій точці, рівні між собою і рівні, в той же час, значенню функції в самій точці x_0.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Означення. Якщо функція неперервна в кожній точці деякої області, то вона називається **неперервною в** цій **області**.

Точки розриву функції та їх класифікація

Означення. Точка x_0 називається ***точкою розриву***, якщо в цій точці порушується умови неперервності функції.

Усі точки розриву функції поділяються на точки розриву першого и другого роду.

Означення. Точка розриву x_0 називається ***точкою розриву першого роду*** функції $y = f(x)$, якщо в цій точці існують скінченні границі функції зліва і справа, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 \qquad \text{і} \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2 .$$

При цьому:

а) якщо $A_1 = A_2 \neq f(x_0)$, то точка x_0 називається ***точкою усувного розриву;***

б) якщо $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 називається ***точкою розриву типу «стрибок».***

Значення $|A_1 - A_2|$ називають ***стрибком функції*** в точці розриву першого роду.

Означення. Точка розриву x_0 називається ***точкою розриву другого роду*** функції $y = f(x)$, якщо, хоча б одна з односторонніх границь (зліва або справа) не існує або дорівнює нескінченності.

Розглянемо функції, що мають різні типи розриву.

Для функції (рис.1)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & де \quad x\neq 0\\ 2, & де \quad x=0\end{cases}$$

точка $x_0=0$ є точкою усувного розриву першого роду, тому що

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad і$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Зауважимо, що положив $f(x)=1$ (замість $f(x)=2$) при $x_0=0$, розрив счезне, функція стане неперервною.

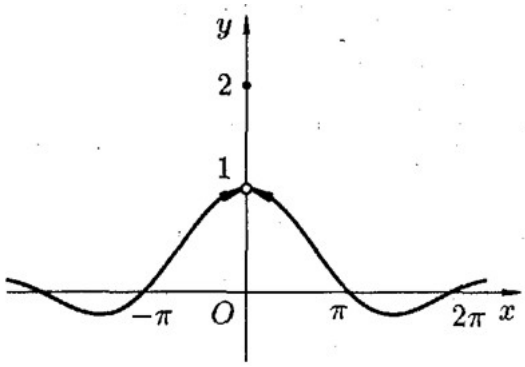


Рис.1

Для функції (рис.2)

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & де \quad -1\le x<2\\ 2-x, & де \quad 2\le x\le 5\end{cases}$$

точка $x_0=2$ є точкою розриву першого роду, тому що $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} x-1=1$ і $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} 2-x=0$.

Стрибок функції дорівнює $|1-0|=1$

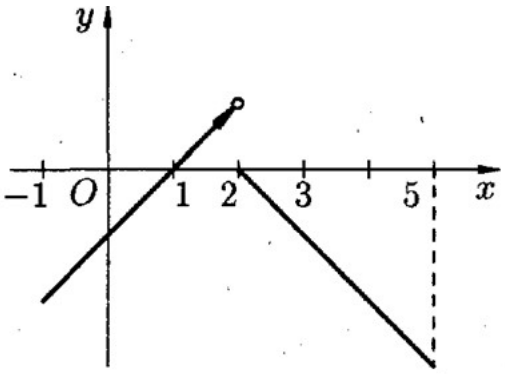


Рис.2

Для функції $y=\dfrac{1}{x-2}$ (рис.3), точка $x_0=2$ є точкою розриву другого роду, тому що $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=-\infty$ і $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=+\infty$.

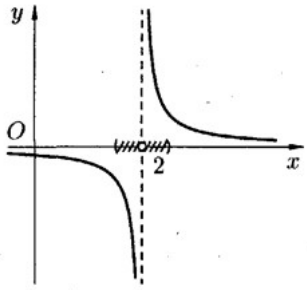


Рис.3

Властивості неперервних функцій.

Теорема 1. Сума скінченного числа функцій, неперервних у точці a, є функція, неперервна в цій точці.

Теорема 2. Добуток скінченного числа функцій, неперервних у точці a, є функція, неперервна в цій точці.

Теорема 3. Відношення двох функцій, неперервних у точці a, є функція, неперервна в цій точці, якщо значення функції у знаменнику відмінне від нуля в точці a.

Теорема 4. Многочлен є функція, неперервна на всій числовій прямій.

Теорема 5. Будь-яка дробова-раціональна функція неперервна в кожній точці своєї області визначення.

Наприклад, функція $f(x)=\dfrac{3-x}{4x+7}$ неперервна на всій числовій прямій, крім точки $x=-\dfrac{7}{4}$, в якій знаменник дробу обертається в нуль.

Функція $$f(x)=\frac{x^3+4x^2+x+1}{x^2+x+1}$$

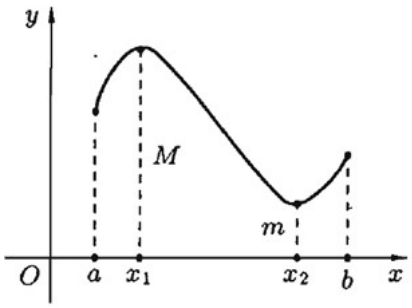
неперервна всюди на $\mathbb{R}$, бо знаменник ніде не обертається в нуль.

Теорема 6. Якщо функція $u=\varphi(x)$ неперервна при $x=x_0$ і $f(u)$ неперервна в точці $u_a=\varphi(x_0)$, то складена функція $y=f[\varphi(x)]$ неперервна в точці x_0.

Теорема 7. Якщо функція $y=f(x)$ неперервна і строго монотонна на $[a;b]$ осі Ox, то обернена функція $y=\varphi(x)$ також неперервна и монотонна на відповідному відрізку $[c;d]$ осі Oy.

Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Теорема (Вейєрштрасса). ***Якщо функція*** $y = f(x)$ ***неперервна на відрізку*** $[a;b]$***, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого і найменшого значень. При цьому вона набуває всі значення між найбільшим і найменшим значенням.***



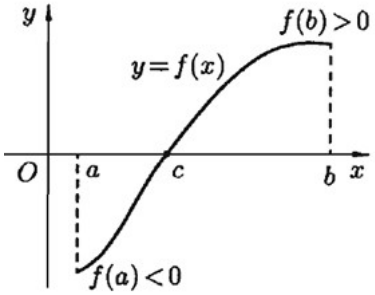
На рисунку функція $y = f(x)$, що є неперервною на відрізку $[a;b]$, приймає своє найбільше значення $M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$ в точці x_1, і найменше значення $m = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$ в точці x_2.

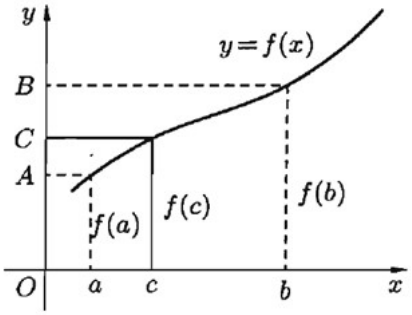
Для будь-якого $x \in [a;b]$ виконується нерівність

$$m \le f(x) \le M$$

Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку, то вона обмежена на цьому відрізку.

Перша теорема Больцано-Коші. ***Якщо функція*** $y = f(x)$ ***неперервна на відрізку*** $[a;b]$ ***і на кінцях цього відрізку набирає значень*** $f(a)$ ***і*** $f(b)$ ***різних знаків, то знайдетеся хоча б одна точка*** $x = c$ **(** $c \in [a;b]$**) всередині відрізка** $[a;b]$***, в якій ця функція обертається в нуль*** **(** $f(c) = 0$**).**



Геометричний зміст теореми: якщо функція на кінцях відрізку має різні за знаком значення, то графік функції перетинає вісь Ox на відрізку $[a;b]$.

Друга теорема Больцано-Коші. ***Якщо функція*** $y = f(x)$ ***неперервна на відрізку*** $[a;b]$ ***і на кінцях цього відрізку набирає різних значень*** $f(a) = A$ і $f(b) = B$, то для довільного числа $C \in [A;B]$ знайдеться всередині цього відрізку хоча б одна точка $c \in [a;b]$, що $f(c) = C$.