Лекція 9

Тема: «Границя функції»

Границя послідовності

Числова послідовність $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ або $\{x_n\}$ є функція $x_n = f(n)$, яка задана на множині N натуральних чисел. Числа x_n, $n \in \mathbb{N}$ називаються ***членами послідовності***.

Послідовність є заданою, якщо її загальний член x_n, виражений як функція його номера n: $x_n = f(n)$

Нехай задані числові послідовності $\{x_n\}$ формулами загального члена:

1) формула $x_n = 2n - 1$ задає послідовність непарних чисел

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots \tag{1}$$

2) формула $x_n = 1 - 2n$ задає числову послідовність

$$-1, -3, -5, -7, -9, \ldots \tag{2}$$

3) формула $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ задає зростаючу послідовність правильних дробів

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, ... \tag{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} = 0,33(3), \quad x_2 = \frac{2}{5} = 0,4, \quad x_3 = \frac{3}{7} = 0,4286.., \quad x_4 = \frac{4}{9} = 0,44(4),$$

$$x_5 = \frac{5}{11} = 0,45(45), \ldots x_{100} = \frac{100}{201} = 0,4975.., \ldots x_{1000} = \frac{1000}{2001} = 0,4998..,$$

$$x_{1\,000\,000} = \frac{1000000}{2000001} = 0,4998...$$

4) формула $x_n = \dfrac{4n-1}{3n-1}$ задає спадаючу послідовність неправильних дробів

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{11}{8}, \frac{15}{11}, \frac{19}{14}, ... \tag{4}$$

В усіх наведених прикладах послідовності є нескінченними. Проте порівняння характеру цих послідовностей показує, що члени послідовності (1) по мірі збільшення їх номера можуть стати більше будь-якого довільно вибраного числа, а члени послідовності (2) - менше будь-якого довільно вибраного числа.

Тому послідовність (1) називають необмежено зростаючою, а послідовність (2) - необмежено спадаючою. Послідовності (3) і (4) є *обмеженими*. Члени першої з них, хоча і зростають зі збільшенням їх номера, але при цьому залишаються менше 1/2, а члени другої, зменшуються зі зростанням їх номера, але залишаються при цьому більше 4/3.

Якщо порівнювати члени послідовності $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ с числом 1/2, можна звернути увагу на те, що зі збільшенням номера члена послідовності різниця $\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right|$ по модулю зменшується і може стати менше будь якого як завгодно малого додатного числа ε. Так, наприклад, умова $\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$ для $\varepsilon = 0,001$ виконується для будь-якого номера, починаючи з номера $n = 250$ (число 250 отримали з нерівності $2(2n + 1) > 1000$).

Аналогічно можна знайти такий номер для будь-якого додатного ε.

Таким чином, значення змінної $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ зі зростанням номера наближається до числа $1/2$ так, що абсолютна величина різниці $\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right|$ стає меншою довільного як завгодно малого додатного числа ε. В цьому випадку число $1/2$ називають границею числової послідовності $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

Означення. Число a називається ***границею послідовності*** $\{x_n\}$, якщо для довільного як завгодно малого додатного числа ε існує таке натуральне число *N*, що при всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon \ . \qquad (5)$$

Границя послідовності позначається таким чином:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Коротко означення границі можна записати так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right).$$

В цьому випадку говорять, що послідовність $\{x_n\}$ має границю, що дорівнює a, або що послідовність збігається до a.

Якщо a є скінченним числом, то послідовність $\{x_n\}$ ***збігається***, якщо $a = \infty$ або границя не існує, то послідовність ***розбігається***.

З розглянутих вище послідовностей збігаються послідовності (3) и (4), тому що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-1}{3n-1} = \frac{4}{3}$, а послідовності (1) і (2) розбігаються, тому що $\lim\limits_{n\to\infty} 2n-1 = \infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} 1-2n = -\infty$.

Зауваження. Не слід вважати, що кожна послідовність має границю. Так послідовності $x_n = (-1)^n$, $x_n = \sin n$ не прямують до якої-небудь величини і границі.

Границя функції

Приведене вище визначення границі послідовності не є загальним. Воно охоплює лише ті випадки, коли аргумент – це ціле число, що зростає необмежено. Узагальненням поняттям границі послідовності є поняття границі функції.

При дослідженні поведінки функції в деякій точці зручно користуватися поняттям околу. *Околом точки* називають будь-який інтервал, що містить цю точку.

Наприклад: інтервали (2; 5), (2,5; 3,5), (2,9; 3,1) – околи точки 3.

Сформулюємо два, еквівалентних між собою, означення границі функції в точці.

Означення 1 (за Гейне «мовою послідовностей»).

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, окрім, може бути, самої точки x_0.

Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ в точці x_0 (або при $x \to x_0$), якщо для деякої послідовності $\{x_n\}$ допустимих значень аргументу x_n, $n \in \mathbb{N}\ (x_n \neq x_0)$, що збігається до x_0 (тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), послідовність відповідних значень функції $\{f(x_n)\}$, $n \in \mathbb{N}$, збігається до числа A.

В цьому випадку пишуть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Геометричний зміст границі функції: співвідношення $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означає, що для всіх точок x, досить близьких до точки x_0, відповідні значення функції як завгодно мало відрізняються від числа A.

Означення 2 (за Коші на «мовою $\varepsilon - \delta$ околів»)

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, окрім, може бути, самої точки x_0.

Число A називається границею функції $y = f(x)$ в точці x_0 (або при $x \to x_0$), якщо для довільного як завгодно малого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що для усіх $x \neq x_0$, які задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записують: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Це означення коротко можна записати так:

$$\left(\lim_{n\to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall x : x \neq x_0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$$

Геометричний зміст границі функції: співвідношення $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ означає, що для всіх точок x з δ- околу точки x_0, точки графіка функції $y = f(x)$ лежать усередині полоси шириною 2ε, яка обмежена прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$. Очевидно, що величина δ залежить від вибору ε, тому пишуть $\delta = \delta(\varepsilon)$.

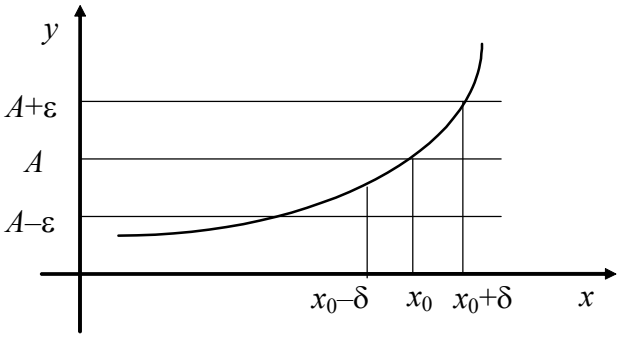
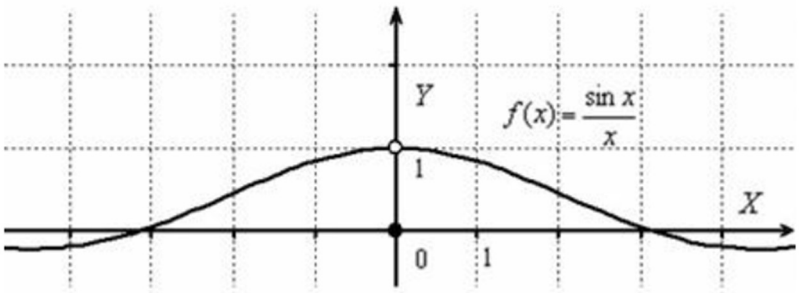


Рис.1

Зауваження. Для існування границі функції при $x \to x_0$ не вимагається, щоб функція була визначена в точці $x = x_0$. При знаходженні границі розглядаються значення функції в околі точки x_0, що відрізняються від x_0.



Практичне правило обчислення границь для елементарних функцій

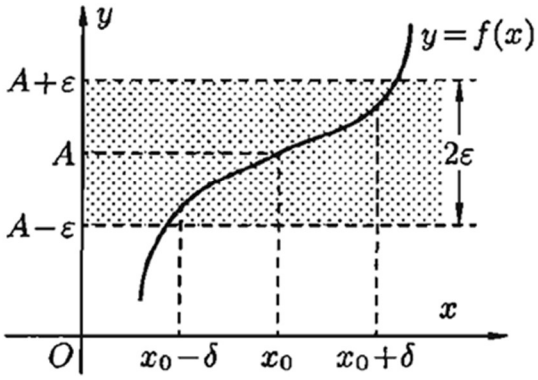
Границя елементарної функції $f(x)$ при x, що прямує до x_0, якщо x_0 входить в область визначення функції, дорівнює значенню функції при $x = x_0$, тобто:

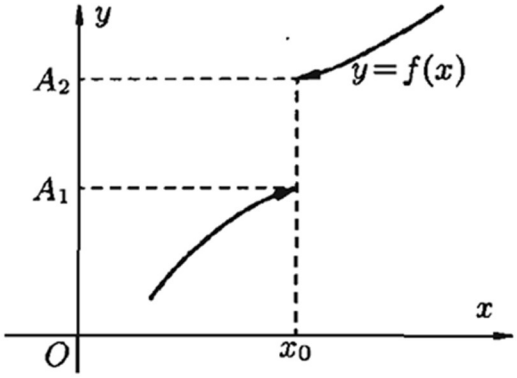
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \text{ якщо } x_0 \in D(f)$$

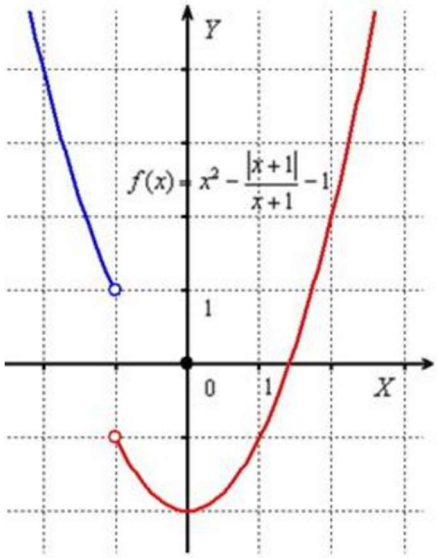
Приклад 1. Обчисліть $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{3x+9}{x-5}$. *Розв'язок.* $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{3x+9}{x-5} = \dfrac{3 \cdot 7 + 9}{7-5} = 15$.

Приклад 2. Обчисліть $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x-10}{x+3}$. *Розв'язок.* $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x-10}{x+3} = \dfrac{2 \cdot 4 - 10}{4+3} = \dfrac{-2}{7}$

Односторонні границі







У наведених вище означеннях границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ вважалось, що x прямує до x_0 довільним способом: залишаючись меншим від x_0 (зліва від x_0), більшим від x_0 (справа від x_0) чи коливаючись навколо x_0, набуваючи значень то менших, то більших від x_0. Існують випадки, коли спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому вводять поняття односторонніх границь.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0.

Означення. Число A_1 називається **границею функції** $f(x)$ **зліва** (або лівою границею) в точці x_0, якщо функція $y = f(x)$ наближується до границі A_1 при прямуванні $x \to x_0$, причому x приймає тільки значення, що менше ніж x_0

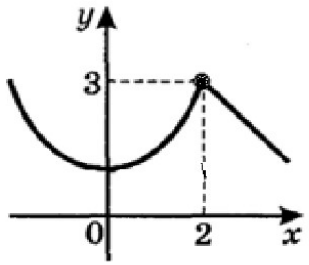
Записують: $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$.

Означення. Число A_2 називається **границею функції** $f(x)$ **справа** (або правою границею) в точці x_0, якщо функція $y = f(x)$ наближується до границі A_2 при прямуванні $x \to x_0$, причому x приймає тільки значення, що більше ніж x_0

Записують:. $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$.

Границі функції зліва и справа називають **односторонніми границями**.

Зауваження 1. Якщо пишуть, що в точці x_0 існує границя функції $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то це позначає, що існують границі функції в точці x_0 зліва і справа і вони рівні числу A. І обернено, якщо границя зліва і границя справа функції в точці x_0 існують і дорівнюють числу A, то число A є границею функції в даній точці.

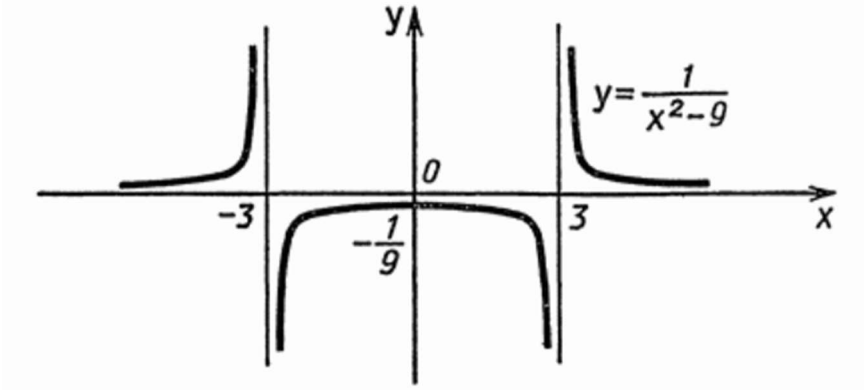


$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

Зауваження 2. У функції в точці може існувати границя, а може і не існувати.

Приклад функції, у якої не існує границь в точках $x = -3$ та $x = 3$

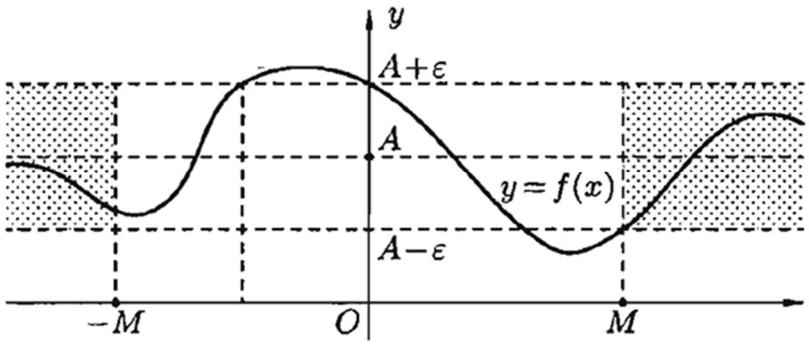


Границя функції при $x \to \infty$

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Число A називають границею функції $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для довільного додатного числа ε існує таке додатне число M, що для всіх значень x, що задовольняють нерівності $|x| > M$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, що символічно записується наступним чином: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

В тому випадку коли $x \to -\infty$, пишуть $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Коротко це означення можна записати так:

$$\left(\lim_{n \to \infty} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \ \forall x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$$

Геометричний зміст цього означення: для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0$ таке, що при $x \in (-\infty;-M)$ або $x \in (M;+\infty)$ відповідні значення функції $f(x)$ попадають в ε-окіл точки A, тобто точки графіка лежать у полосі шириною 2ε, яка обмежена прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$.