Лекція 9

Невизначений інтеграл

У попередньому семестрі розглядалася наступна задача: дана функція $f(x)$, треба знайти її похідну, тобто функцію $f'(x)$. Розглянемо задачу, обернену до знаходження похідної: відшукання функції за її похідною.

Нехай дана функція $f(x)$; треба знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$.

Означення. Функція $F(x)$ називається ***первісною*** функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ неперервна, якщо $F(x)$ є диференційована на цьому проміжку, і справджується рівність $F'(x)=f(x)$.

Приклад. Функція $F(x)=\frac{x^3}{3}$ є первісною для функції $y=x^2$ в інтервалі $(-\infty;+\infty)$, тому що на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ функція $F(x)=\frac{x^3}{3}$ є неперервною та диференційованою, причому $\forall x\in(-\infty;+\infty)$ справджується рівність $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^3\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2$.

Очевидно, що первісними є також будь які функції

$F(x)=\frac{x^3}{3}+C$, де C – стала, оскільки

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2=f(x).$$

Зауваження. Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то функція $F(x)+C$, де C – довільна стала, також є первісною функції $f(x)$.

В зв'язку із введенням поняття первісної $F(x)$ для функції $f(x)$ виникає ряд запитань:

1) Для якої функції $f(x)$ на заданому проміжку X існує первісна функція $F(x)$?
2) Якщо для функції $f(x)$ первісна існує, то чи одним способом вона визначається, тобто скільки первісних може мати функція?
3) Якщо $F(x)$ і $P(x)$ дві первісні функції для функції $f(x)$, то як вони відрізняються між собою?

Відповіді сформулюємо в вигляді теорем.

Теорема 1. (про первісні неперервних функцій). Будь-яка неперервна на проміжку X функція має на ньому первісну.

Теорема 2. (про безліч первісних для заданої функції). Якщо $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$ на X, то для будь-якого числа $C \in \mathbb{R}$ функція $F(x)+C$ є також первісною функції $f(x)$ на X

Теорема 3. (про різницю двох первісних заданої функції). Будь-які дві первісні заданої функції відрізняються одна від одної на сталу величину.

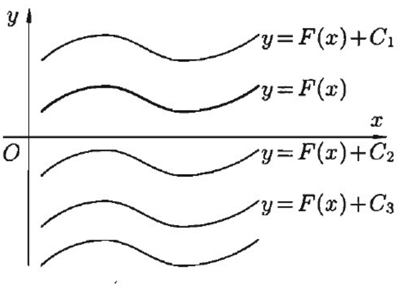
Означення. ***Невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на проміжку X називається множина всіх первісних функції $f(x)$ на цьому проміжку. Позначається невизначений інтеграл символом $\int f(x)dx$. Отже, за визначенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Знак $\int$ – знак інтеграла, $f(x)$ називають підінтегральною функцією, букву x називають змінною інтегрування, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Зауваження. Невизначений інтеграл являє собою множину функцій $F(x)+C$.

Операція знаходження невизначеного інтеграла, тобто множини всіх первісних деякої функції, називається **інтегруванням** даної функції.



С геометричній точки зору невизначений інтеграл представляє сукупність кривих, зміщених відносно друг друга вздовж осі Oy.

Слід відзначити , що якщо похідна елементарної функції завжди є елементарною функцією, то первісна від елементарної функції, може бути і не елементарною, тобто представленою в вигляді скінченної комбінації елементарних функцій. Це, наприклад, функції $\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}, e^{-x^2}$, $\sin x^2, \cos x^2$. Для подібних функцій розроблені методи, що дозволяють знаходити первісну наближено.

Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів

Властивість 1. *Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x).$$

Зауваження. Завдяки цієї властивості правильність інтегрування перевіряється диференціюванням. Наприклад, рівність

$\int\left(4x^3+7\right)dx = x^4+7x+C$, правильна, тому що $\left(x^4+7x+C\right)' = 4x^3+7$

Властивість 2. *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:*

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Властивість 3. *Невизначений інтеграл від похідної деякої функції або від її диференціала дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої, тобто:*

$$\int F'(x)dx = F(x)+C \quad \text{або} \quad \int dF(x) = F(x)+C.$$

Властивість 4. *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто виконується рівність:*

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \text{ де } a \neq 0 \text{ - стала.}$$

Властивість 5. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми* (*різниці*) *двох або декілька х функцій дорівнює алгебраїчній сумі* (*різниці*) *їх інтегралів*:

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

Властивість 6. *(Інваріантність формул інтегрування). Якщо* $\int f(x)dx = F(x) + C$, *то і* $\int f(u)du = F(u) + C$, *де* $u = \varphi(x)$, *довільна функція, що має неперервну похідну.*

Таким чином, формула для невизначеного інтеграла залишається правильною незалежно від того, є змінна інтегрування незалежною змінною або будь-якою функцією від неї, що має неперервну похідну.

Таким чином з формули $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ заміною x на u $(u = \varphi(x))$ отримаємо $\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$.

Зокрема, $\int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$, $\int \ln^3 x d(\ln x) = \frac{\ln^4 x}{4} + C$,

$$\int tg^3 x d(tgx) = \frac{tg^4 x}{4} + C.$$

При обчисленні невизначених інтегралів корисно мати на увазі **наступні правила**.

1. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$.

2. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$.

3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

Користуючись тим, що інтегрування є операція обернена до диференціювання, можна отримати таблицю основних інтегралів. Табличні інтеграли слід вивчити напам’ять. Справедливість формул таблиці можна перевірити, якщо взяти похідну правої частини рівності, при цьому вона буде дорівнювати підінтегральній функції.

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int 0 \cdot dx = C.$

2. $\int dx = x + C.$

3. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad (m \neq -1).$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

9. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

10. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

13. $\int shxdx = chx + C$

14. $\int chxdx = shx + C$

15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

18. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C.$

19. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

20. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$

$-a < x < a, a > 0.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a \neq 0.$

23. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

.

Приклад . Обчислити інтеграл: $\int\left(5\cos x-9x^2+\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

Розв'язання.

Застосовуючи властивість лінійності невизначеного інтеграла, маємо

$$\int\left(5\cos x-9x^2+\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=5\int\cos x dx-9\int x^2dx+7\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=5\sin x-3x^3+7arcsix+C$$