

## Лекція 8

# Характеристики числової функції

### Деякі поняття математичного аналізу.

Наведемо скорочення та символи, що часто використовуються математичному аналізу:

$\in$  - належить;

$\notin$  - не належить;

$\forall$  - для будь-якого довільного; ( $\forall x$  - для будь якого  $x$ )

$\exists$  - існує; ( $\exists x$  - існує такий  $x$ )

$\Rightarrow$  - слідує;

$\Leftrightarrow$  - рівносильне, або - тоді і тільки тоді;

$\{x_n\}$  - числова послідовність;

$k = \overline{1, n}$  - індекс  $k$  приймає всі цілі значення від 1 до  $n$ ;

$n!$  - факторіал числа  $n$ ;  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ;

$\sum$  - знак суми;  $\sum_{i=1}^n n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots$

$\prod$  - знак добутку;  $\prod_{i=1}^n n^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \dots$

$\pi$  - константа, «число Пи»;  $\pi \approx 3,1416\dots$

$e$  - константа Непера;  $e \approx 2,718$

У математиці є ряд первісних понять, які не визначаються, а служать для визначення інших. До таких понять, зокрема, належать величина, точка, множина.

Стосовно множини можна застосувати термін «сукупність» (сукупність коренів рівняння, сукупність векторів, сукупність чисел і т. п.).

Множини позначаються великими латинськими літерами  $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ , а елементи з яких складається множина – малими літерами  $a, b, c, \dots, x, y, z$ .

Якщо  $A$  – множина,  $a$  – її елемент, то можна записати:  $A = \{a \mid \text{опис властивостей елемента}\}$ . Наприклад,  $A = \{a \mid a < 15\}$ .

Твердження про те, що елемент  $a$  належить множині  $A$ , записують у вигляді  $a \in A$ . Коли навпаки - елемент  $a$  не належить множині  $A$ , то виконують такий запис:  $a \notin A$ .

Якщо множина  $A$ , утворена з чотирьох елементів  $a, b, c, d$  записують  $A = \{a, b, c, d\}$ .

### Числовими множинами є:

$\mathbb{N}$  - множина всіх натуральних чисел;  $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$

$\mathbb{Z}$  - множина всіх цілих чисел;  $\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm n; \dots\}$

$\mathbb{Q}$  - множина всіх раціональних чисел;  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \right\}$

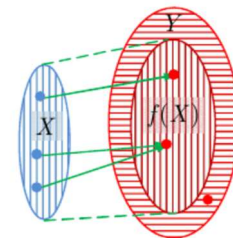
$\mathbb{R}$  - множина всіх дійсних чисел;

$\mathbb{C}$  - множина всіх комплексних чисел.

**Означення.** Якщо задано множини  $X, Y$  і кожному значенню  $x, x \in X$  ставиться у відповідність за деяким законом значення  $y, y \in Y$ , то кажуть, що на множині  $X$  задана **функція**  $y = f(x)$ .

Множина  $X$  - область визначення функції (позначається, як  $D(f)$  або  $D(y)$ ), множина допустимих значень аргументу  $x$ .

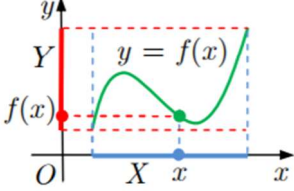
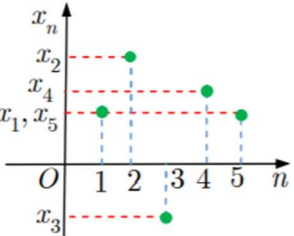
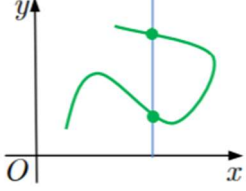
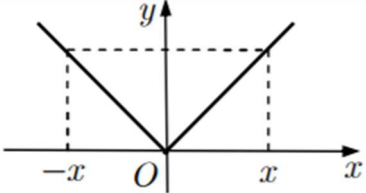
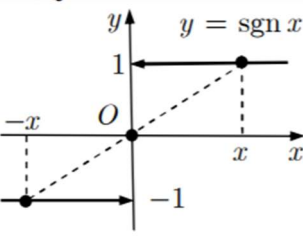
Множина  $Y$  - область значень функції.



**Зауваження.** Означення дано для однозначної функції, хоча можуть бути і багатозначні функції. Будемо в подальшому розглядати однозначні функції.

**Графіком** функції  $y = f(x)$  називається множина всіх точок площини  $Oxy$ , для кожної з яких  $x \in X$ , а  $y = f(x)$  (є відповідним значенням функції).

Зазвичай графіком функції є деяка лінія; але приміром, якщо  $X = \mathbb{N}$ , то графіком функції є набір ізольованих точок.

 <p>Графік функції <math>y = f(x)</math>, <math>X = \mathbb{R}</math></p>	 <p>Графік функції <math>y = f(x)</math>, <math>X = \mathbb{N}</math></p>	 <p>Крива, що не є графіком однозначної функції</p>
 <p>Графік функції <math>y =  x </math></p>	 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ <p>Графік функції <math>y = \operatorname{sign} x</math></p>	

### Способи задання функції

Існують такі способи задання функції: аналітичний (за допомогою формул), графічний (за допомогою графіка), табличний, описовий. В подальшому будемо застосовувати аналітичний спосіб задання функції.

**Аналітичний спосіб**, коли функцію задають за допомогою однієї або декількох формул.

Аналітичним способом можна задати функцію явним, неявним або параметричним видом.

а) функцію можна задати **явно** ( $y$  виражається через формулу, або декілька формул з  $x$ ).

Приклади.  $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ ;

$$y = \sin 3x + \cos 4x;$$

$$y = \begin{cases} 3x + 2, & x < -5 \\ x^2 - 1, & -5 \leq x < 5 \\ 2x - 5, & x > 5 \end{cases}$$

б) функцію можна задати **неявно** у вигляді рівняння  $F(x, y) = 0$

Приклад.  $\sin 3x + \cos 4y - e^{xy} = 0$

в) функцію можна задати **параметрично** рівностями, що залежать від параметра.

Приклад. Функція  $y = y(x)$  задана параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Якщо піднести до квадрата обидві частини обох рівнянь та додати їх, отримаємо

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

$x^2 + y^2 = 1$  - рівняння кола з центром в точці  $(0,0)$  радіуса  $R = 1$  (саме через це тригонометричні функції іноді називають круговими).

## Основні характеристики поведінки функції

Значення аргументу  $x \in D(f)$ , для якого значення функції  $f(x)$  дорівнює нулеві, називають **нулем функції**. Отже, нулі функції є коренями рівняння

$$f(x) = 0.$$

В інтервалі, на якому функція додатна, графік її розташований над віссю  $Ox$ , а в інтервалі, на якому вона від'ємна, — під віссю  $Ox$ ; у точках перетину з віссю абсцис функція дорівнює нулеві.

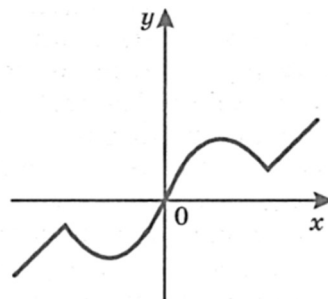
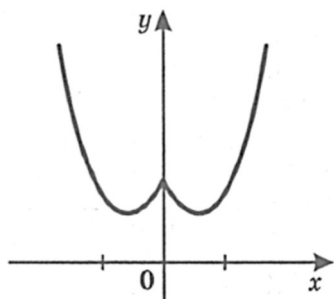
## Парність і непарність функції

**Означення 2.2 (парної і непарної функції).** Функцію  $f$  називають *парною (непарною)*, якщо:

- 1) область її означення симетрична щодо точки  $O$ ;
- 2) для кожного  $x$  з області означення виконано рівність

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Графік парної функції симетричний щодо осі  $Oy$ , а непарної — щодо початку координат.



Приміром, функція  $y = |x|$  є парною функцією. Графік функції  $y = |x|$  симетричний щодо осі  $Oy$ .

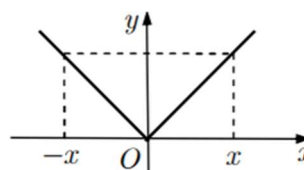


Рис. 2.6. Графік парної функції  $y = |x|$

Функція знак числа (сигнум)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

є непарною функцією. Графік цієї функції симетричний щодо початку координат.

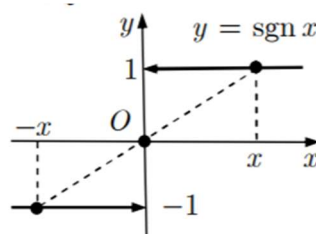
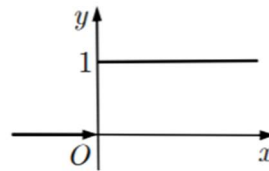


Рис. 2.7. Графік непарної функції  $y = \operatorname{sgn} x$

Одинична функція Гевісайда  
 $\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$  є функцією



загального вигляду.

Рис. 2.8. Графік функції Гевісайда  $y = \eta(x)$

### Властивості парних і непарних функцій.

1. Зміна знаку перед функцією не змінює її парності (непарності).
2. Сума парних (непарних) функцій є парною (непарною) функцією.
3. Добуток будь-якої кількості парних функцій є парною функцією.
4. Добуток парної функції на непарну є непарною функцією.

## Періодичність функції

**Означення 2.3 (періодичної функції).** Функцію  $f$  називають *періодичною*, якщо існує число  $T \neq 0$ , таке, що:

- 1) для кожного  $x$  з області означення  $x + T$  теж належить області означення;
- 2) виконано рівність

$$f(x + T) = f(x).$$

Число  $T$  називають *періодом* функції  $f$ .

Якщо існує найменший додатний період функції, то його називають *основним періодом*.

Якщо  $T$  — основний період функції  $f$ , то графік такої функції «повторюється» з періодичністю  $T$ .

Приміром, функція *дробова частина числа*

$$y = \{x\} = x - [x]$$

періодична з основним періодом 1.

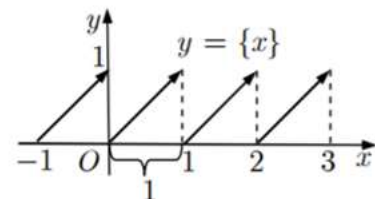


Рис. 2.9. Графік періодичної функції  $y = \{x\}$



## Властивості періодичних функцій.

1. Якщо  $T$  — період функції  $f$ , то її періодами також будуть числа  $mT, m \in \mathbb{Z}$ .

2. Якщо функція  $y = f(x), x \in D(f)$ , періодична з періодом  $T$ , то функція  $y = f(\omega x)$  — періодична з періодом  $\frac{T}{\omega}$ .

## Монотонність функції

**Означення 2.4 (монотонних функцій).** Функцію  $y = f(x), x \in D$ , називають *зростаючою (спадною)* на множині  $X \subset D(f)$ , якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше (менше) значення функції і позначають  $f \nearrow$  ( $f \searrow$ ), тобто

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Функцію  $y = f(x), x \in D(f)$ , називають *неспадною (незростаючою)* на множині  $X \subset D(f)$ , якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає не менше (не більше) значення функції, тобто

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

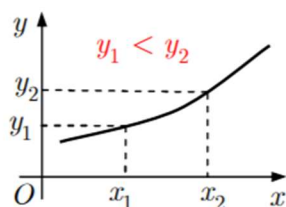


Рис. 2.10. Графік зростаючої функції

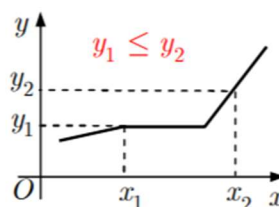


Рис. 2.11. Графік неспадної функції

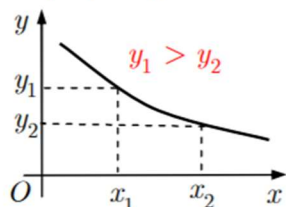


Рис. 2.12. Графік спадної функції

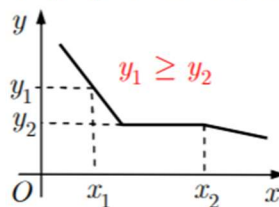


Рис. 2.13. Графік незростаючої функції

Зростаючі, спадні, неспадні і незростаючі функції називають *монотонними*; зростаючі і спадні — *строго монотонними*.

Стала функцію  $y = c$  є незростаючою і неспадною водночас.

Запишімо означення монотонних послідовностей.

Послідовність  $\{x_n\}$ :

1) *зростає* (позначають  $\{x_n\} \nearrow$ ), якщо

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ x_n < x_{n+1};}$$

2) *не спадає*, якщо

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1};}$$

3) *спадає* (позначають  $\{x_n\} \searrow$ ), якщо

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > x_{n+1} > \dots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1};}$$

4) *не зростає*, якщо

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}.}$$

## Обмеженість функції

### Означення 2.5 (обмеженої функції).

Функцію  $f$  називають *обмеженою зверху (знизу)* на множині  $X \subset D(f)$  якщо існує таке число  $M \in \mathbb{R}$  ( $m \in \mathbb{R}$ ), що для будь-яких значень аргументу  $x \in X$  виконано умову

$$f(x) \leq M \quad (m \leq f(x)).$$

Функцію  $f$  називають *обмеженою* на множині  $X \subset D(f)$ , якщо існує таке число  $C > 0$ , що для будь-яких значень аргументу  $x \in X$  виконано умову

$$|f(x)| \leq C.$$

Приміром, функція  $y = x^2$  є обмеженою знизу на своїй природній області означення  $\mathbb{R}$  і необмеженою зверху; функція  $y = 2 - x^2$  обмежена зверху і необмежена знизу на  $\mathbb{R}$ ; функція  $y = \sin x$  є обмеженою на  $\mathbb{R}$ .

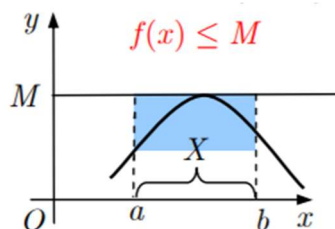


Рис. 2.14. Графік функції, обмеженої зверху на множині  $X$

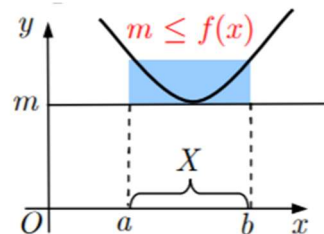


Рис. 2.15. Графік функції, обмеженої знизу на множині  $X$



## Означення 2.6 Верхня і нижня межа множини (супремум і інфімум).

Нехай числова множина  $E$  обмежена зверху. Точною верхньою (найменшою верхньою) межею або супремумом (лат. *supremum* — найвищий) числової множини  $E$  називається число  $M$ , що дорівнює або більше усіх елементів множини. Другими словами, супремум — це найменша з усіх верхніх меж. Позначають як  $M = \sup E$   $M = \sup \{x\}$ .

Нехай числова множина  $E$  обмежена знизу. Точною нижньою (найбільшою нижньою) межею або інфімумом (лат. *infimum* — найнижчий) числової множини  $E$  називається число  $m$ , що дорівнює або менше усіх елементів множини. Другими словами, інфімум — це найбільша з усіх нижніх меж. Позначають як  $m = \inf E$   $m = \inf \{x\}$ .

Проілюструємо поняття супремума та інфімуму на прикладах.

Якщо множина є закритий інтервал  $E = [a, b]$ , то  $\inf E = a$ ,  $\sup E = b$  і обидва числа належать множині.

Якщо множина є відкритий інтервал  $E = (a, b)$ , то однаково  $\inf E = a$ ,  $\sup E = b$ , але ці числа не належать множині.

Для множини  $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$  маємо, що  $\inf E = 0$ ,  $\sup E = 1$ .

## Класифікація функцій

До **основних елементарних функцій** відносять функції:  $y = const$ , степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні і обернені тригонометричні.

**Елементарною функцією** називається функція, яка подається у вигляді  $y = f(x)$ , де  $f(x)$  - є єдиним аналітичним виразом, який складено з основних елементарних функцій за допомогою скінченої кількості арифметичних операцій та суперпозицій.

## Тригонометричні функції

К тригонометричним функціям традиційно відносять:

**прямі тригонометричні функції:**

- **синус** -  $y = \sin x$ ,  $D(f) = \mathbb{R}$ ;
- **косинус** -  $y = \cos x$ ,  $D(f) = \mathbb{R}$ ;

**похідні тригонометричних функцій:**

- **тангенс**  $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  (в іноземній літературі позначення  $\tan x$ )

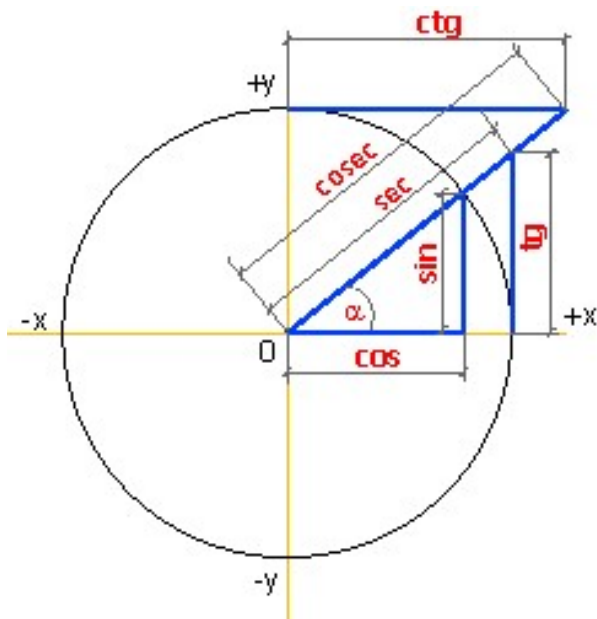
область визначення  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

- **котангенс**  $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$  (в іноземній літературі позначення  $\cot x$ )

область визначення  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{ x \mid x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \}$

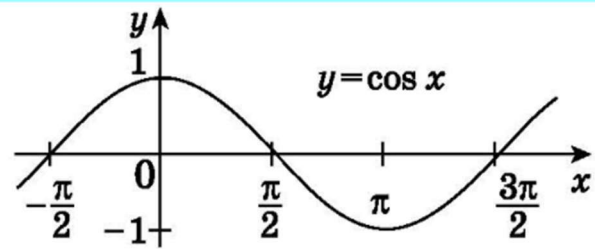
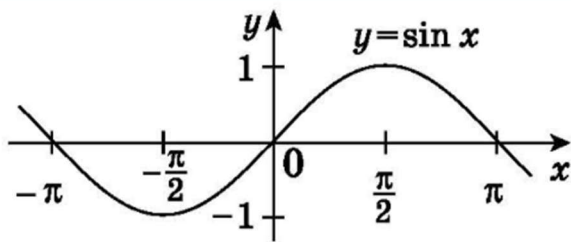
- **секанс**  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ;

- **косеканс**  $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$  (в іноземній літературі позначення  $\operatorname{csc} x$ )



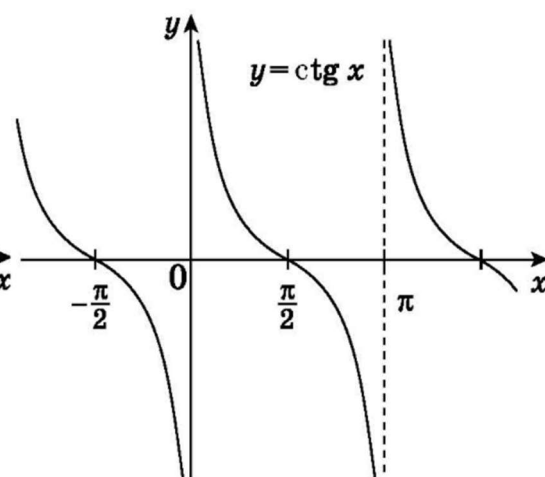
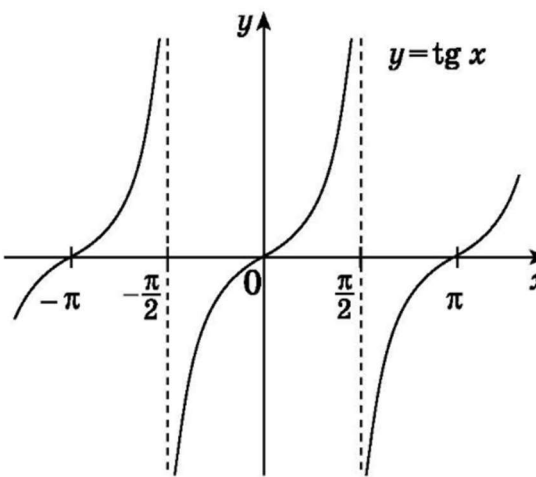
Функція  $y = \sin x$

Функція  $y = \cos x$

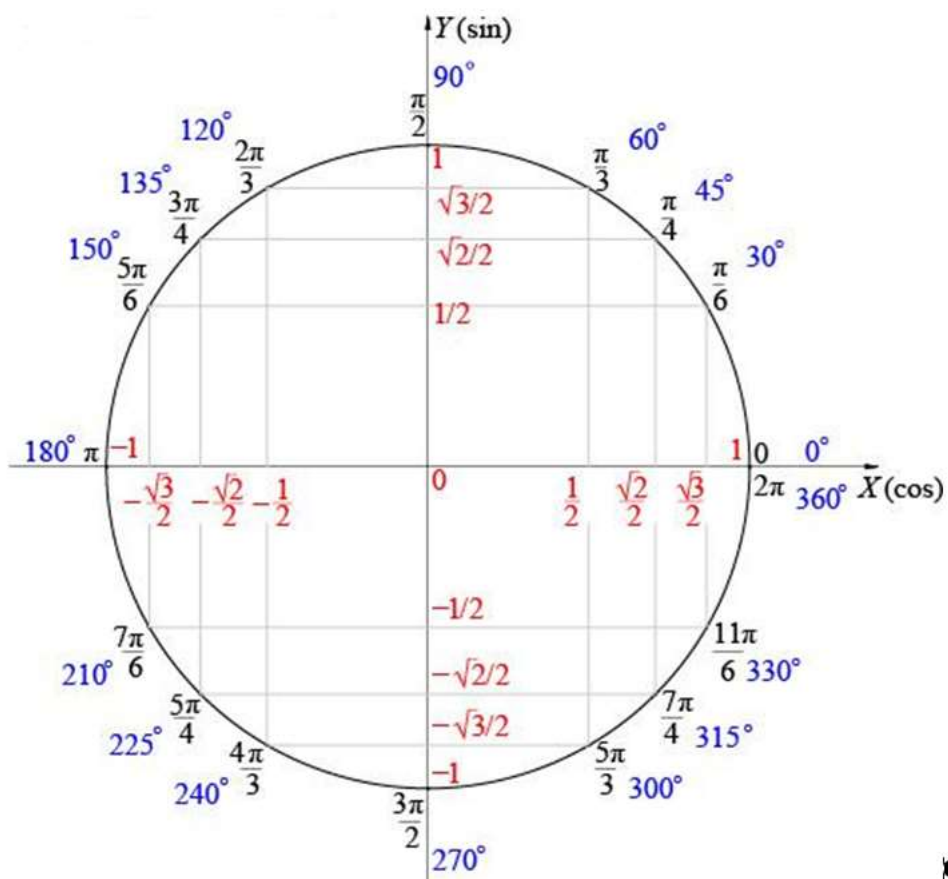


Функція  $y = \operatorname{tg} x$

Функція  $y = \operatorname{ctg} x$



# Тригонометричне коло



$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin $\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos $\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg $\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0
ctg $\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існує	0	не існує

## Обернені тригонометричні функції

- 1) **арксинус**  $y = \arcsin x, D(f) = [-1; 1];$
- 2) **арккосинус**  $y = \arccos x, D(f) = [-1; 1];$
- 3) **арктангенс**  $y = \operatorname{arctg} x, D(f) = \mathbb{R};$
- 4) **арккотангенс**  $y = \operatorname{arcctg} x, D(f) = \mathbb{R}.$

- арксинус  $y = \arcsin x$  (в іноземній літературі позначення  $\sin^{-1} x$ ) - кут, синус якого дорівнює  $x$ .

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

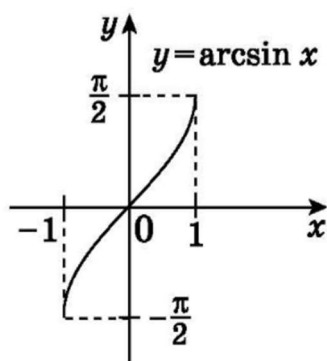
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

- арккосинус  $y = \arccos x$  (в іноземній літературі позначення  $\cos^{-1} x$ ) - кут, косинус якого дорівнює  $x$

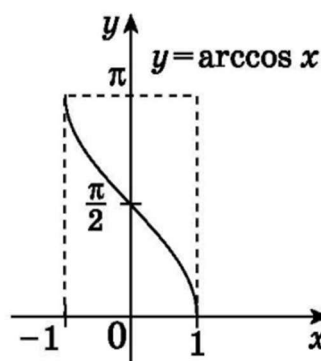
$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

- арктангенс  $y = \operatorname{arctg} x$  (в іноземній літературі позначення  $\tan^{-1} x$  або  $\operatorname{arctan} x$ ) - кут, тангенс якого дорівнює  $x$ .
- арккотангенс  $y = \operatorname{arcctg} x$  (в іноземній літературі позначення  $\operatorname{arc} \cot x$ ) - кут, котангенс якого дорівнює  $x$ .

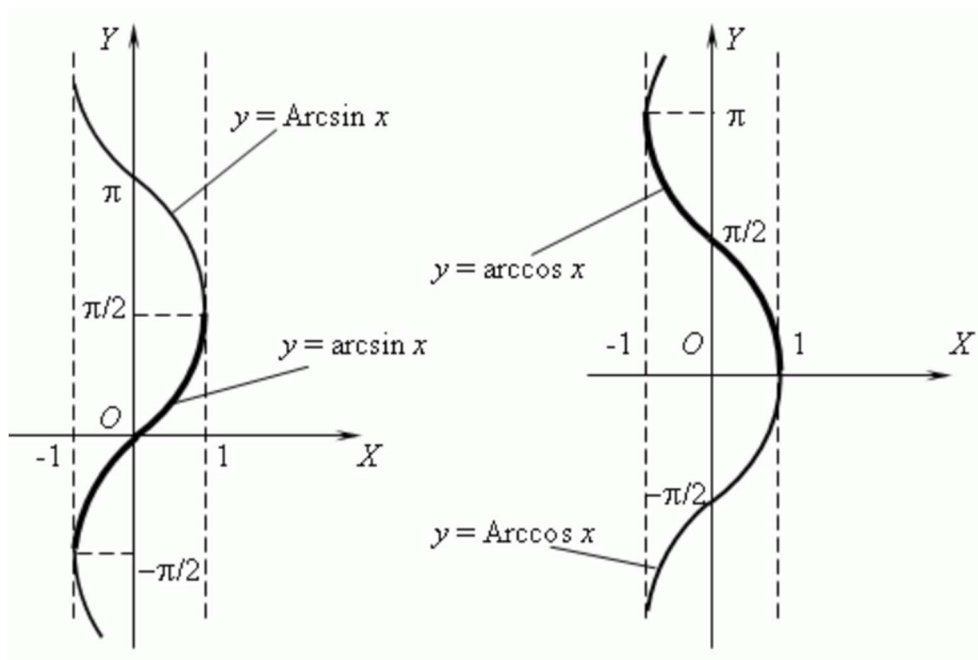
Функція  $y = \arcsin x$



Функція  $y = \arccos x$

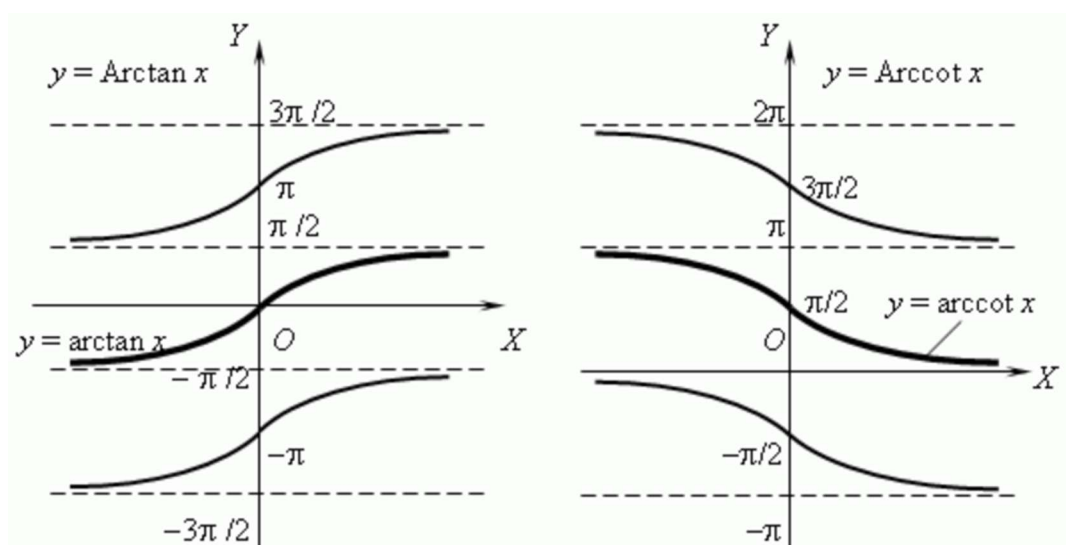
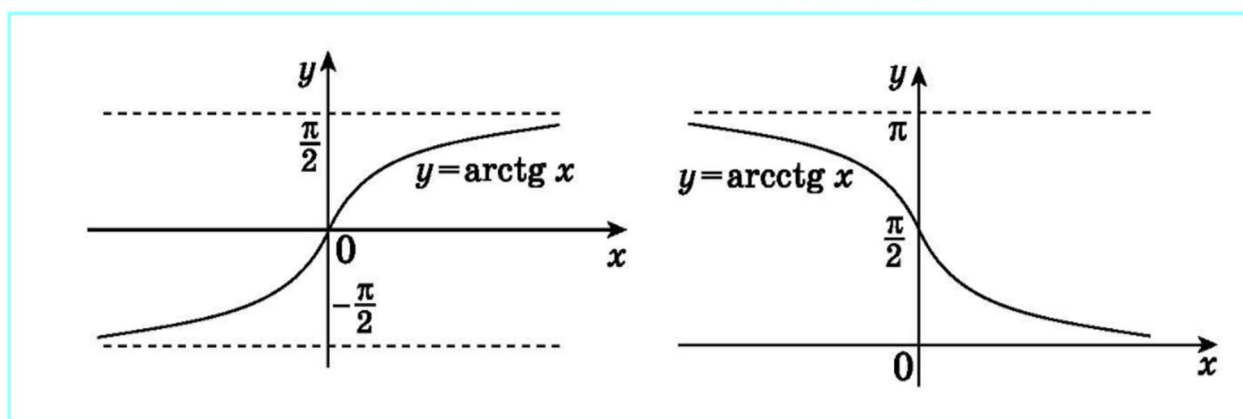






Функція  $y = \arctg x$

Функція  $y = \operatorname{arccotg} x$



## Гіперболічні функції

Гіперболічними функціями називають:

1) *гіперболічний синус*

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, D(f) = \mathbb{R};$$

2) *гіперболічний косинус*

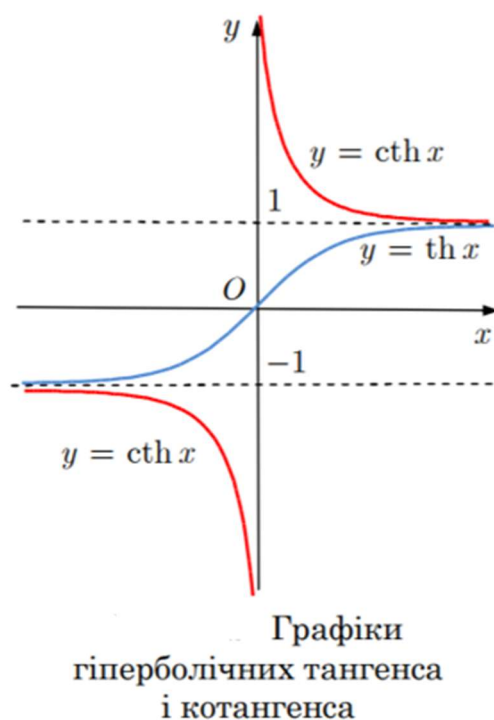
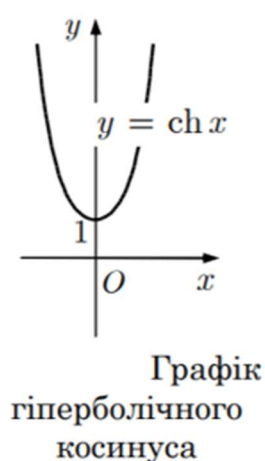
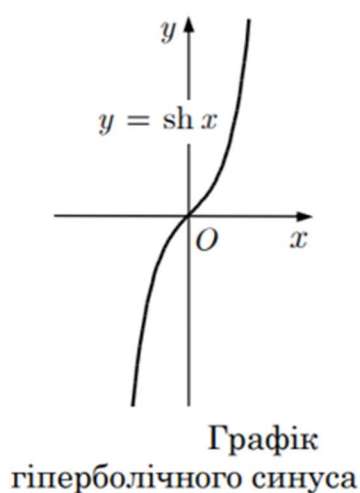
$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, D(f) = \mathbb{R};$$

3) *гіперболічний тангенс*

$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, D(f) = \mathbb{R};$$

4) *гіперболічний котангенс*

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$



Назва «гіперболічні» випливає з того, що параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = cht \\ y = sht \end{cases} \text{ задають гіперболу.}$$

Піднесемо обидві частини обох рівнянь до квадрата і віднімемо від першого друге:

$$x^2 - y^2 = \underbrace{ch^2 t - sh^2 t}_1 \quad (\text{перевіряється безпосередньо підстановкою}).$$

$x^2 - y^2 = 1$  - рівняння гіперболи.

Співвідношення для гіперболічних функцій схожі на співвідношення для тригонометричних функцій:

1)  $ch^2 x - sh^2 x = 1;$

2) 
$$\begin{cases} sh(x \pm y) = sh x \cdot ch y \pm ch x \cdot sh y, \\ ch(x \pm y) = ch x \cdot ch y \pm sh x \cdot sh y; \end{cases}$$

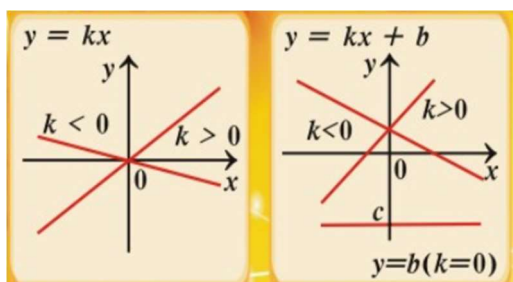
3) 
$$\begin{cases} sh 2x = 2 sh x \cdot ch x, \\ ch 2x = ch^2 x + sh^2 x. \end{cases}$$

## Основні елементарні функції

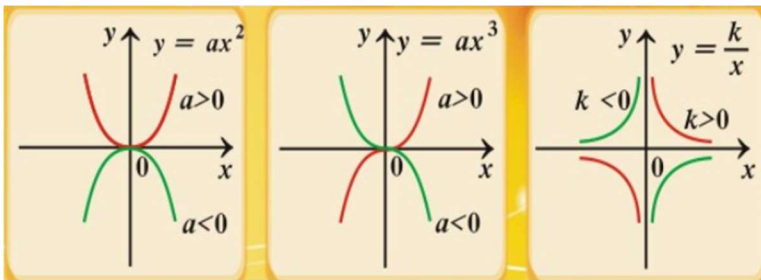
*Основними елементарними* функціями називають:

- 1) *сталу* функцію  $f(x) = C, D(f) = \mathbb{R};$
- 2) *степеневу* функцію  $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, D(f) = (0; +\infty);$
- 3) *показникову* функцію  $y = a^x, a > 0, a \neq 1, D(f) = \mathbb{R};$
- 4) *логарифмічну* функцію  $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, D(f) = (0; +\infty);$
- 5) тригонометричні функції;
- 6) обернені тригонометричні функції.

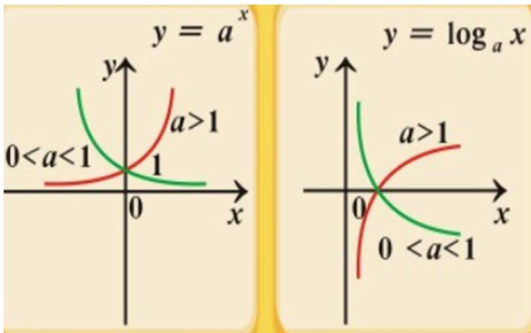
Всі функції, одержані скінченною кількістю арифметичних дій над основними елементарними функціями, а також їхні суперпозиції, утворюють *клас елементарних функцій*.



лінійні функції



степеневі функції



показникові і логарифмічні функції