Лекція 8

Характеристики числової функції

Деякі поняття математичного аналізу.

Наведемо скорочення та символи, що часто використовуються математичному аналізі:

$\in$ - належить;

$\notin$ - не належить;

$\forall$ –для будь-якого довільного; ($\forall x$ - для будь якого x)

$\exists$ – існує; ($\exists x$ - існує такий x)

$\Rightarrow$ – слідує;

$\Leftrightarrow$ – рівносильне, або - тоді і тільки тоді;

$\{x_n\}$ - числова послідовність;

$k=\overline{1,n}$ - індекс k приймає всі цілі значення від 1 до n;

$n!$ - факторіал числа n; $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$;

$\sum$ - знак суми; $\sum_{i=1}^{n} n^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+....$

$\prod$ - знак добутку; $\prod_{i=1}^{n} n^2 = 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot ....$

π - константа, «число Пи»; $\pi \approx 3{,}1416...$

e - константа Непера; $e \approx 2{,}718$

У математиці є ряд первісних понять, які не визначаються, а служать для визначення інших. До таких понять, зокрема, належать величина, точка, множина.

Стосовно множини можна застосувати термін «сукупність» (сукупність коренів рівняння, сукупність векторів, сукупність чисел і т. п.).

Множини позначаються великими латинськими літерами **A, B, C, …, X, Y, Z,** а елементи з яких складається множина – малими літерами a, b, c,…, x, y, z.

Якщо A – множина, a – її елемент, то можна записати: $A = \{a|$ опис властивостей елемента$\}$. Наприклад, A=$\{a|\ a<15\}$.

Твердження про те, що елемент a належить множині A, записують у вигляді $a \in A$. Коли навпаки - елемент a не належить множині A, то виконують такий запис: $a \notin A$.

Якщо множина A, утворена з чотирьох елементів a,b,c,d записують $A=\{a,b,c,d\}$.

Числовими множинами є:

$\mathbb{N}$ - множина всіх натуральних чисел; $\mathbb{N}=\{1;2;3;...;n;...\}$

$\mathbb{Z}$ - множина всіх цілих чисел; $\mathbb{Z}=\{0;\pm1;\pm2;\pm3;...;\pm n;...\}$

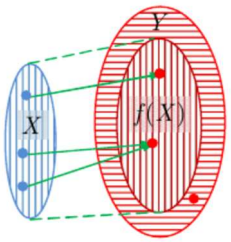
$\mathbb{Q}$ - множина всіх раціональних чисел; $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}: m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

$\mathbb{R}$ - множина всіх дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ - множина всіх комплексних чисел.

Означення. Якщо задано множини X, Y і кожному значенню x, $x\in X$ ставиться у відповідність за деяким законом значення y, $y\in Y$, то кажуть, що на множині X **задана функція** $y=f(x)$.

Множина X - область визначення функції (позначається, як $D(f)$ або $D(y)$), множина допустимих значень аргументу x.

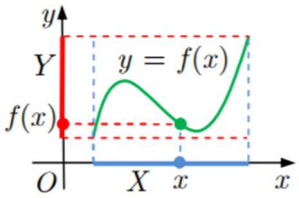


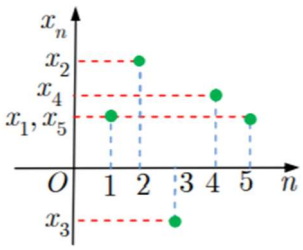
Множина Y - область значень функції.

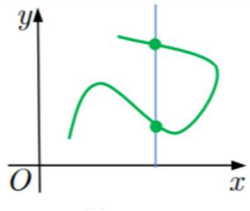
Зауваження. Означення дано для однозначної функції, хоча можуть бути і многозначні функції. Будемо в подальшому розглядати однозначні функції.

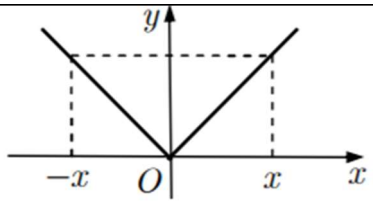
Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок площини Oxy, для кожної з яких $x \in X$, а $y = f(x)$ (є відповідним значенням функції).

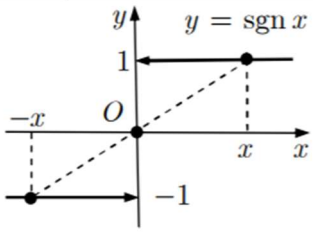
Зазвичай графіком функції є деяка лінія; але приміром, якщо $X = \mathbb{N}$, то графіком функції є набір ізольованих точок.

<table>
<tr>
<td> 

Графік функції $y = f(x)$, $X = \mathbb{R}$</td>
<td> 

Графік функції $y = f(x)$, $X = \mathbb{N}$</td>
<td> 

Крива, що не є графіком однозначної функції</td>
</tr>
<tr>
<td> 

Графік функції $y = |x|$</td>
<td> 

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$
Графік функції $y = sign x$</td>
</tr>
</table>

Способи задання функції

Існують такі способи задання функції: аналітичний (за допомогою формул), графічний (за допомогою графіка), табличний, описовий. В подальшому будемо застосовувати аналітичний спосіб задання функції.

Аналітичний спосіб, коли функцію задають за допомогою однієї або декількох формул.

Аналітичним способом можна задати функцію явним, неявним або параметричним видом.

а) функцію можна задати **явно** (y виражається через формулу, або декілька формул з x).

Приклади. $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 2$;

$$y = \sin 3x + \cos 4x;$$

$$y = \begin{cases} 3x + 2, & x < -5 \\ x^2 - 1, & -5 \le x < 5 \\ 2x - 5, & x > 5 \end{cases}$$

б) функцію можна задати **неявно** у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$

Приклад. $\sin 3x + \cos 4y - e^{xy} = 0$

в) функцію можна задати **параметрично** рівностями, що залежать від параметра.

Приклад. Функція $y = y(x)$ задана параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Якщо піднести до квадрата обидві частини обох рівнянь та додати їх, отримаємо

$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$

$x^2 + y^2 = 1$ - рівняння кола з центром в точці $(0,0)$ радіуса $R = 1$ (саме через це тригонометричні функції іноді називають круговими).

Основні характеристики поведінки функції

Значення аргументу $x \in D(f)$, для якого значення функції $f(x)$ дорівнює нулеві, називають *нулем функції*. Отже, нулі функції є коренями рівняння

$$f(x) = 0.$$

В інтервалі, на якому функція додатна, графік її розташований над віссю Ox, а в інтервалі, на якому вона від'ємна,— під віссю Ox; у точках перетину з віссю абсцис функція дорівнює нулеві.

Парність і непарність функції

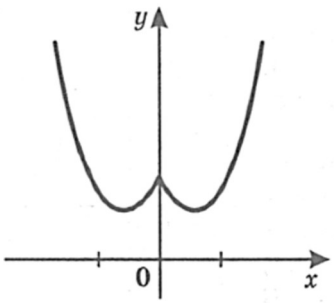
Означення 2.2 **(парної і непарної функції).** Функцію f називають *парною (непарною)*, якщо:

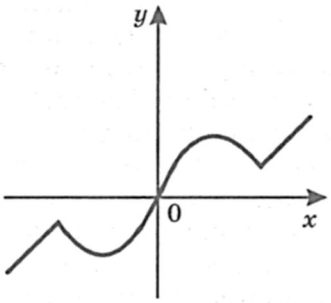
1) область її означення симетрична щодо точки O;

2) для кожного x з області означення виконано рівність

$$f(-x) = f(x) \ \ (f(-x) = -f(x)).$$

Графік парної функції симетричний щодо осі Oy, а непарної — щодо початку координат.





Приміром, функція $y = |x|$ є парною функцію. Графік функції $y = |x|$ симетричний щодо осі Oy.

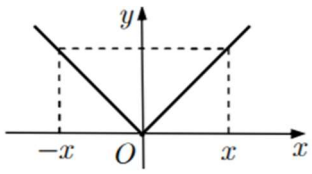


Рис. 2.6. Графік парної функції $y = |x|$

Функція знак числа (сигнум)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

є непарною функцією. Графік цієї функції симетричний щодо початку координат.

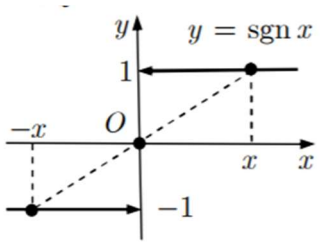


Рис. 2.7. Графік непарної функції $y = \operatorname{sgn} x$

Одинична функція Гевісайда $\eta(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$ є функцією загального вигляду.

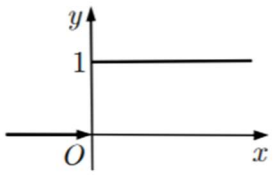


Рис. 2.8. Графік функції Гевісайда $y = \eta(x)$

Властивості парних і непарних функцій.

1. Зміна знаку перед функцією не змінює її парності (непарності).

2. Сума парних (непарних) функцій є парною (непарною) функцією.

3. Добуток будь-якої кількості парних функцій є парною функцією.

4. Добуток парної функції на непарну є непарною функцією.

Періодичність функції

Означення 2.3 (періодичної функції). Функцію f називають *періодичною*, якщо існує число $T \neq 0$, таке, що:

1) для кожного x з області означення $x+T$ теж належить області означення;

2) виконано рівність

$$f(x+T)=f(x).$$

Число T називають *періодом* функції f.

Якщо існує найменший додатний період функції, то його називають *основним періодом*.

Якщо T — основний період функції f, то графік такої функції «повторюється» з періодичністю T.

Приміром, функція *дробова частина числа*

$$y=\{x\}=x-[x]$$

періодична з основним періодом 1.

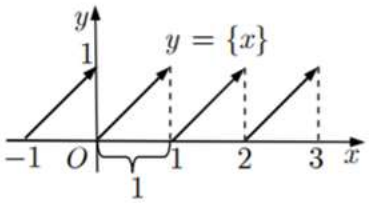


Рис. 2.9. Графік періодичної функції $y = \{x\}$

Властивості періодичних функцій.

1. Якщо T — період функції f, то її періодами також будуть числа $mT, m \in \mathbb{Z}$.

2. Якщо функція $y = f(x), x \in D(f)$, періодична з періодом T, то функція $y = f(\omega x)$ — періодична з періодом $\dfrac{T}{\omega}$.

Монотонність функції

Означення 2.4 (монотонних функцій). Функцію $y = f(x), x \in D$, називають *зростаючою* (*спадною*) на множині $X \subset D(f)$, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше (менше) значення функції і позначають $f \nearrow$ ($f \searrow$), тобто

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Функцію $y = f(x), x \in D(f)$, називають *неспадною* (*незростаючою*) на множині $X \subset D(f)$, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає не менше (не більше) значення функції, тобто

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \quad (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

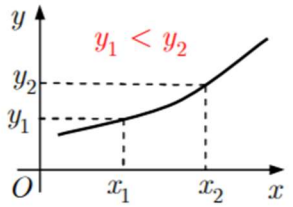


Рис. 2.10. Графік зростаючої функції

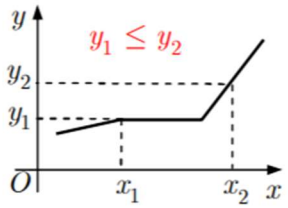


Рис. 2.11. Графік неспадної функції

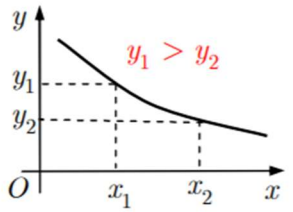


Рис. 2.12. Графік спадної функції

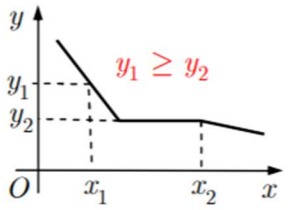


Рис. 2.13. Графік незростаючої функції

Зростаючі, спадні, неспадні і незростаючі функції називають *монотонними*; зростаючі і спадні — *строго монотонними*.

Стала функцію $y = c$ є незростаючою і неспадною водночас.

Запишімо означення монотонних послідовностей.

Послідовність $\{x_n\}$:

1) *зростає* (позначають $\{x_n\} \nearrow$), якщо

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ x_n < x_{n+1};}$$

2) *не спадає*, якщо

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : x_n \le x_{n+1};}$$

3) *спадає* (позначають $\{x_n\} \searrow$), якщо

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1};}$$

4) *не зростає*, якщо

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : x_n \ge x_{n+1}.}$$

Обмеженість функції

Означення 2.5 (обмеженої функції).

Функцію f називають *обмеженою зверху* (*знизу*) на множині $X \subset D(f)$ якщо існує таке число $M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$, що для будь-яких значень аргументу $x \in X$ виконано умову

$$f(x) \le M \ \ (m \le f(x)).$$

Функцію f називають *обмеженою* на множині $X \subset D(f)$, якщо існує таке число $C > 0$, що для будь-яких значень аргументу $x \in X$ виконано умову

$$\left|f(x)\right| \le C.$$

Приміром, функція $y = x^2$ є обмеженою знизу на своїй природній області означення $\mathbb{R}$ і необмеженою зверху; функція $y = 2 - x^2$ обмежена зверху і необмежена знизу на $\mathbb{R}$; функція $y = \sin x$ є обмеженою на $\mathbb{R}$.

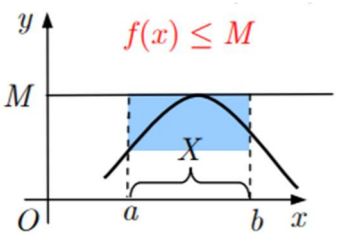


Рис. 2.14. Графік функції, обмеженої зверху на множині X

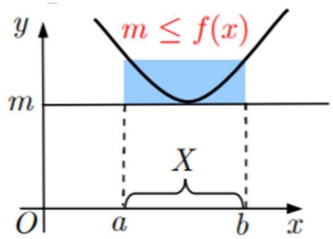


Рис. 2.15. Графік функції, обмеженої знизу на множині X

Означення 2.6 **Верхня і нижня межа множини (супремум і інфімум).**

Нехай числова множина E обмежена зверху. Точною верхньою (найменшою верхньою) межею або супремумом (лат. supremum — найвищий) числової множини E називається число M, що дорівнює або більше усіх елементів множини. Другими словами, супремум — це найменша з усіх верхніх меж. Позначають як $M = \sup E$ $M = \sup\limits_{x \in E} \{x\}$.

Нехай числова множина E обмежена знизу. Точною нижньою (найбільшою нижньою) межею або інфімумом (лат. infimum — найнижчий) числової множини E називається число m, що дорівнює або менше усіх елементів множини. Другими словами, інфімум — це найбільша з усіх нижніх меж. Позначають як $m = \inf E$ $m = \inf\limits_{x \in E} \{x\}$.

Проілюструємо поняття супремума та інфімума на прикладах.

Якщо множина є закритий інтервал $E = [a,b]$, то $\inf E = a$, $\sup E = b$ і обидва числа належать множині.

Якщо множина є відритий інтервал $E = (a,b)$, то однаково $\inf E = a$, $\sup E = b$, але ці числа не належать множині.

Для множини $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ маємо, що $\inf E = 0$, $\sup E = 1$.

Класифікація функцій

До **основних елементарних функцій** відносять функції: $y = const$, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні і обернені тригонометричні.

Елементарною функцією називається функція, яка подається у вигляді $y = f(x)$, де $f(x)$ - є єдиним аналітичним виразом, який складено з основних елементарних функцій за допомогою скінченої кількості арифметичних операцій та суперпозицій.

Тригонометричні функції

К тригонометричним функціям традиційно відносять:

***прямі тригонометричні функції*:**

- ***синус*** - $y = \sin x$, $D(f) = \mathbb{R}$;
- ***косинус*** - $y = \cos x$, $D(f) = \mathbb{R}$;

***похідні тригонометричних функцій*:**

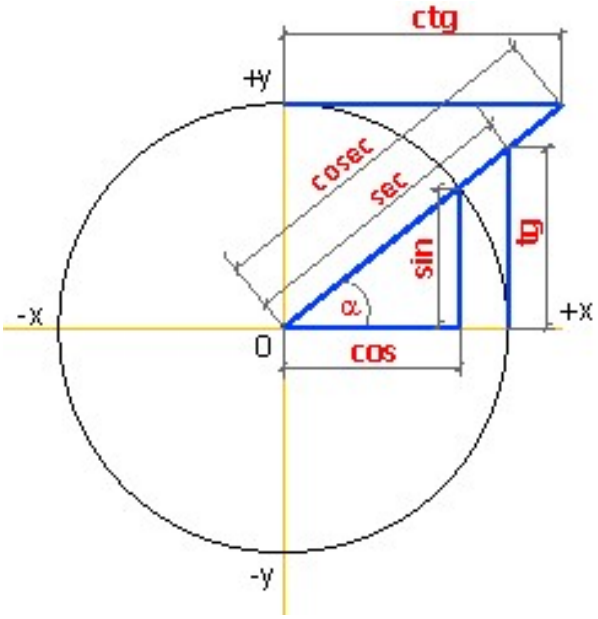
- ***тангенс*** $y = tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (в іноземній літературі позначення $\tan x$)

  область визначення $D(f) = \mathbb{R}$ *окрім* $\left\{ x \middle| x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$;

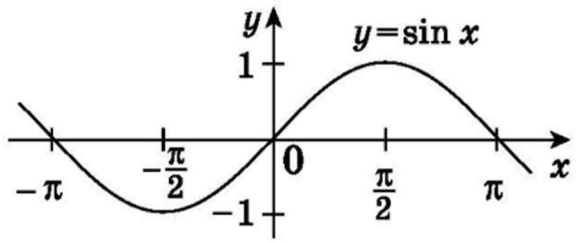
- ***котангенс*** $y = ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (в іноземній літературі позначення $\cot x$)

  область визначення $D(f) = \mathbb{R}$ *окрім* $\{ x | x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \}$

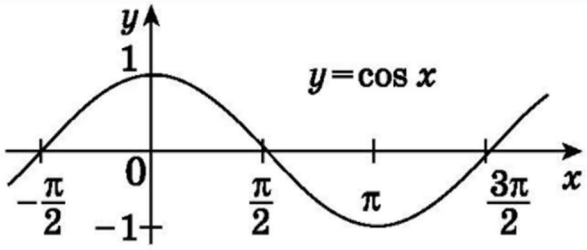
- ***секанс*** $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$;
- ***косеканс*** $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ (в іноземній літературі позначення $\csc x$)



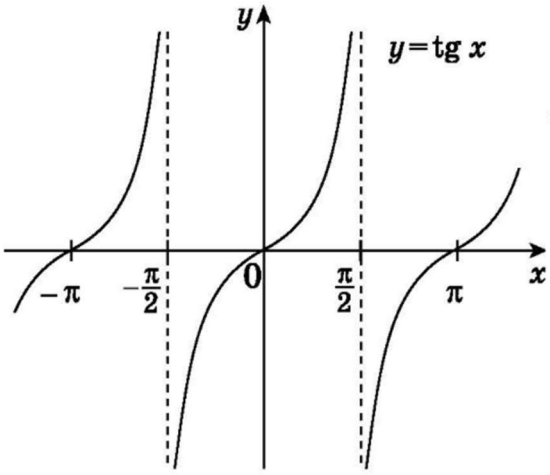
Функція $y = \sin x$



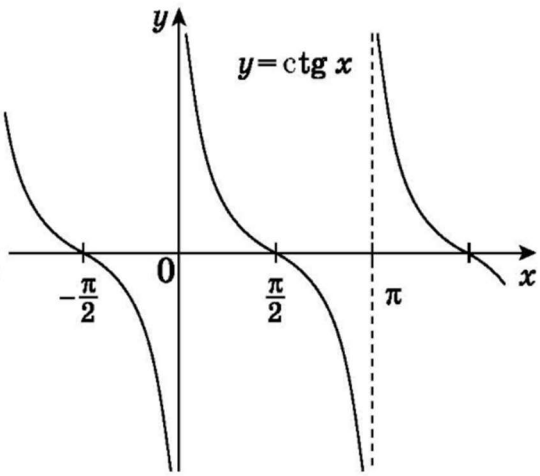
Функція $y = \cos x$



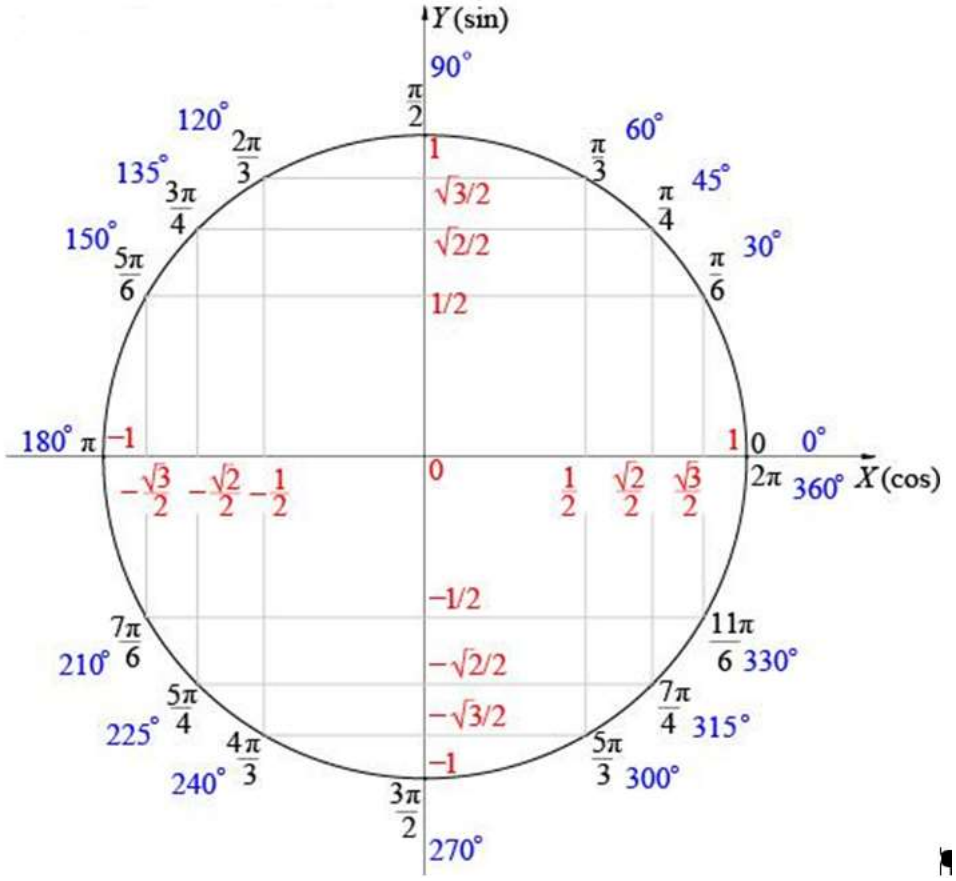
Функція $y = \operatorname{tg} x$



Функція $y = \operatorname{ctg} x$



Тригонометричне коло



α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0
ctg α	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існує	0	не існує

Обернені тригонометричні функції

1) *арксинус* $y = \arcsin x, D(f) = [-1;1]$;
2) *арккосинус* $y = \arccos x, D(f) = [-1;1]$;
3) *арктангенс* $y = \operatorname{arctg} x, D(f) = \mathbb{R}$;
4) *арккотангенс* $y = \operatorname{arcctg} x, D(f) = \mathbb{R}$.

- арксинус $y = \arcsin x$ (в іноземній літературі позначення $\sin^{-1} x$) - кут, синус якого дорівнює x.

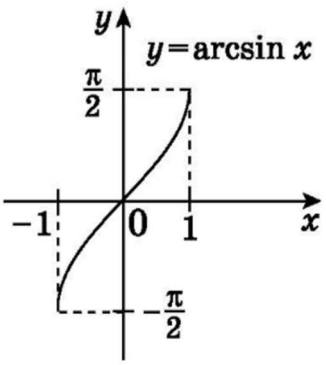
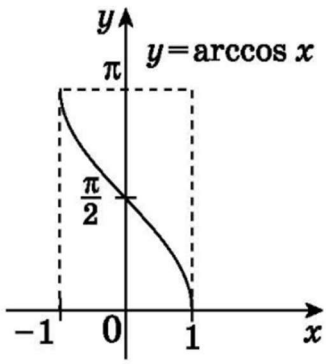
$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

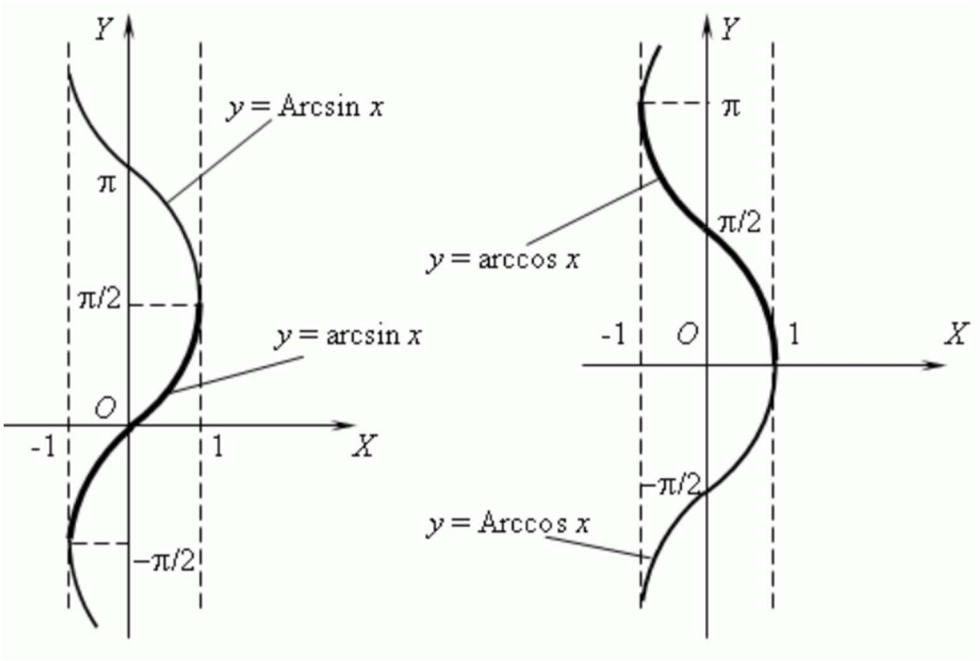
$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

- арккосинус $y = \arccos x$ (в іноземній літературі позначення $\cos^{-1} x$) - кут, косинус якого дорівнює x

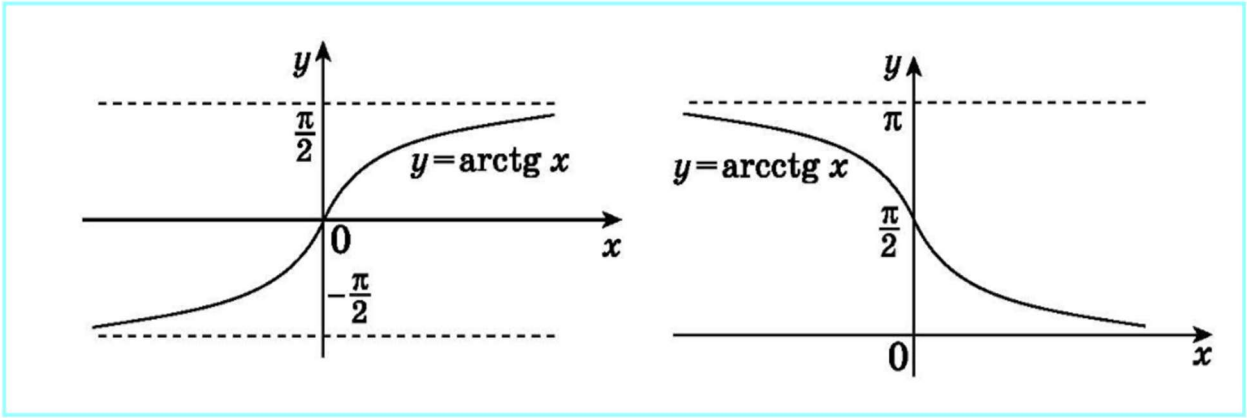
$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

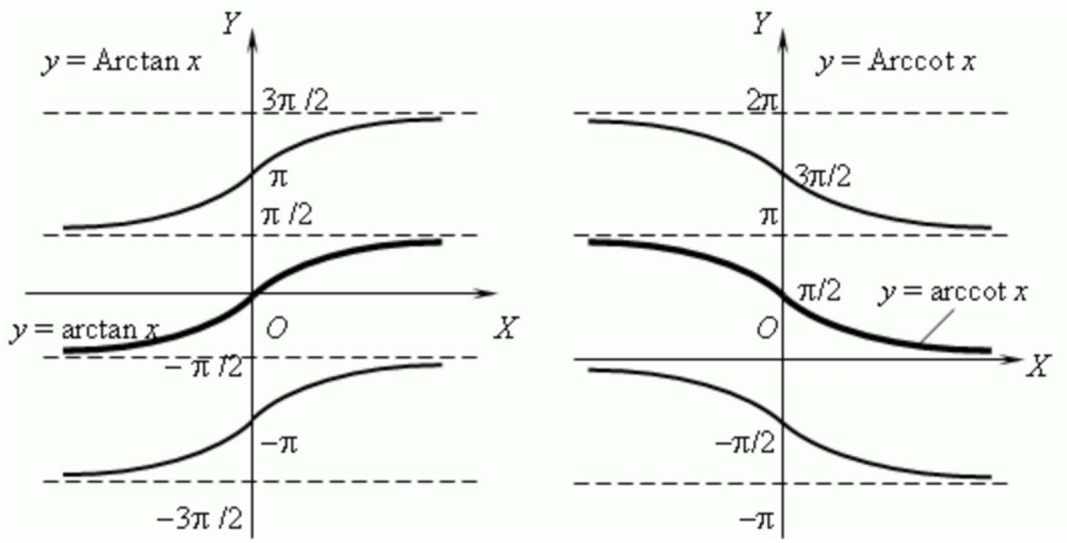
- арктангенс $y = arctgx$ (в іноземній літературі позначення $\tan^{-1} x$ або $\arctan x$) - кут, тангенс якого дорівнює x.
- арккотангенс $y = arcctgx$ (в іноземній літературі позначення $arc\cot x$) - кут, котангенс якого дорівнює x.

Функція $y = \arcsin x$	Функція $y = \arccos x$
	



Функція $y = \mathrm{arctg}\, x$	Функція $y = \mathrm{arcctg}\, x$





Гіперболічні функції

Гіперболічними функціями називають:

1) *гіперболічний синус*

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, D(f) = \mathbb{R};$$

2) *гіперболічний косинус*

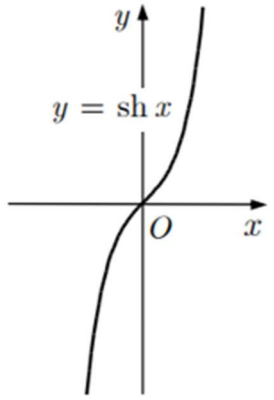
$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, D(f) = \mathbb{R};$$

3) *гіперболічний тангенс*

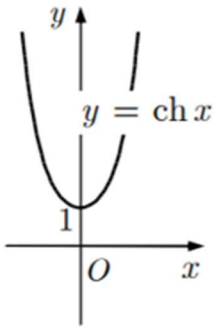
$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, D(f) = \mathbb{R};$$

4) *гіперболічний котангенс*

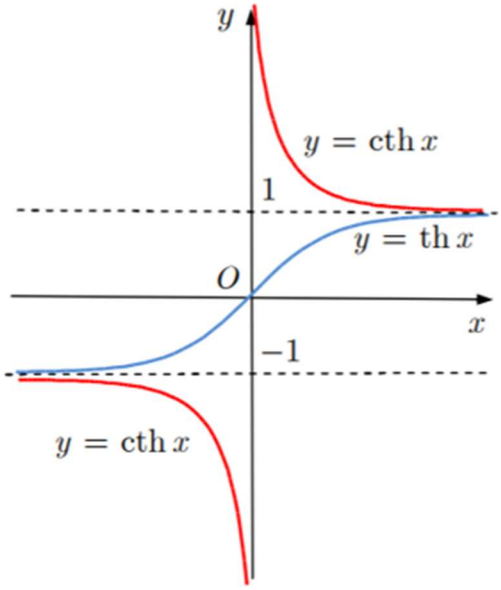
$$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$



Графік гіперболічного синуса



Графік гіперболічного косинуса



Графіки гіперболічних тангенса і котангенса

Назва «гіперболічні» випливає з того, що параметричні рівняння

$\begin{cases} x = cht \\ y = sht \end{cases}$ задають гіперболу.

Піднесемо обидві частини обох рівнянь до квадрата і віднімемо від першого друге:

$x^2 - y^2 = \underbrace{ch^2 t - sh^2 t}_{1}$ (перевіряється безпосередньо підстановкою).

$x^2 - y^2 = 1$ - рівняння гіперболи.

Співвідношення для гіперболічних функцій схожі на співвідношення для тригонометричних функцій:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$

2) $\begin{cases} \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x, \\ \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x. \end{cases}$

Основні елементарні функції

Основними елементарними функціями називають:

1) *сталу* функцію $f(x) = C, D(f) = \mathbb{R};$

2) *степеневу* функцію $y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, D(f) = (0;+\infty);$

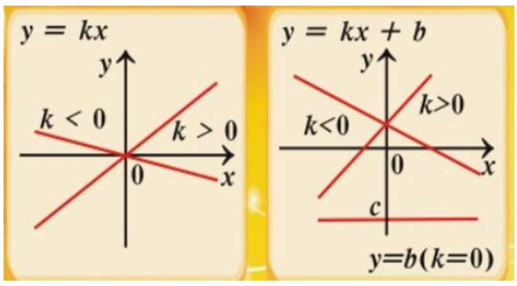
3) *показникову* функцію $y = a^x, a > 0, a \neq 1, D(f) = \mathbb{R};$

4) *логарифмічну* функцію $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, D(f) = (0;+\infty);$

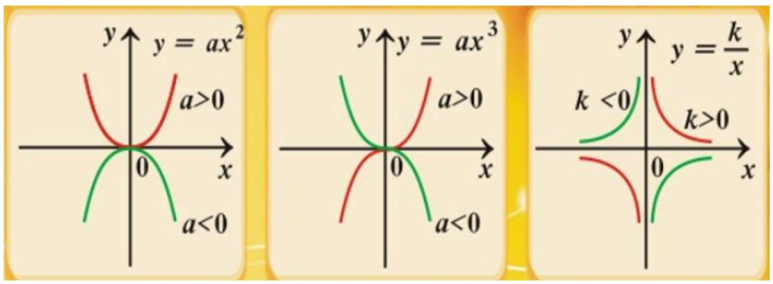
5) тригонометричні функції;

6) обернені тригонометричні функції.

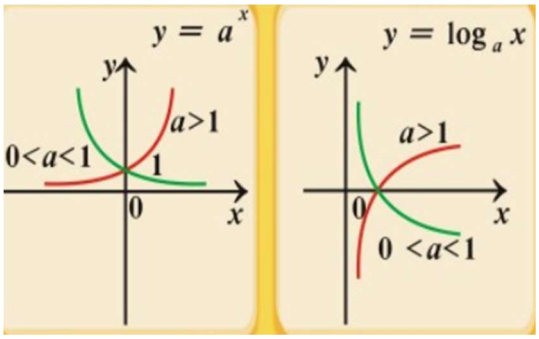
Всі функції, одержані скінченною кількістю арифметичних дій над основними елементарними функціями, а також їхні суперпозиції, утворюють *клас елементарних функцій.*



лінійні функції



степеневі функції



показникові і логарифмічні функції