Лекція 8

Застосування теорем диференціального числення для дослідження функцій

Основні поняття.

Означення. При $x_2 > x_1$ на інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ називається:

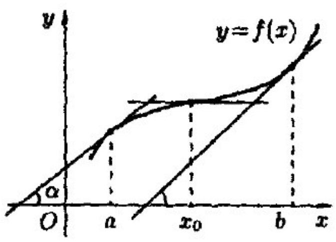
- ***зростаючою***, якщо $f(x_2) > f(x_1)$;
- ***спадаючою***, якщо $f(x_2) < f(x_1)$;
- ***неспадаючою***, якщо $f(x_2) \geq f(x_1)$;
- ***незростаючою***, якщо $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Всі такі функції називаються ***монотонними***.

Теорема 1 (необхідна умова зростання функції). Якщо диференційована на інтервалі $(a;b)$ функція зростає, то $f'(x) \geq 0$ на інтервалі $(a;b)$.

Теорема 2 (необхідна умова спадання функції). Якщо диференційована на інтервалі $(a;b)$ функція спадає, то $f'(x) \leq 0$ на інтервалі $(a;b)$.

Зауваження. Геометрично теорема 1 означає, що дотичні до графіка зростаючої диференційованої функції утворюють гострі кути з додатним напрямом осі Ox або в деяких точках паралельні осі Ox.



Інтервали монотонності.

Інтервали монотонності можуть відділятися один від одного бо точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають стаціонарними точками), або точками, де похідна не існує, а сама функція існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує (а сама функція в цій точці існує), називають **критичними точками першого роду**.

Інтервали монотонності можуть відділятися один від одного критичними точками першого роду.

О з н а к и   з р о с т а н н я і с п а д а н н я ф у н к ц і ї.

Якщо $f'(x_0) > 0$, *функція* $f(x)$ *зростає в точці* x_0.

Якщо $f'(x_0) < 0$, *функція* $f(x)$ *спадає в точці* x_0.

Означення. Значення $f(x_0)$ називається ***максимумом*** функції $y = f(x)$, якщо при будь якому достатньо малому $h > 0$ виконуються умови: $f(x_0 - h) < f(x_0)$ і $f(x_0 + h) < f(x_0)$. Точка x_0 в цьому випадку називається ***точкою максиму*** функції $y = f(x)$ (рис.2).

Означення. Значення $f(x_0)$ називається ***мінімумом*** функції $y = f(x)$, якщо при будь якому достатньо малому $h > 0$ виконуються умови: $f(x_0 - h) > f(x_0)$ і $f(x_0 - h) < f(x_0)$. Точка x_0 в цьому випадку називається ***точкою мінімуму*** функції $y = f(x)$ (рис.3).

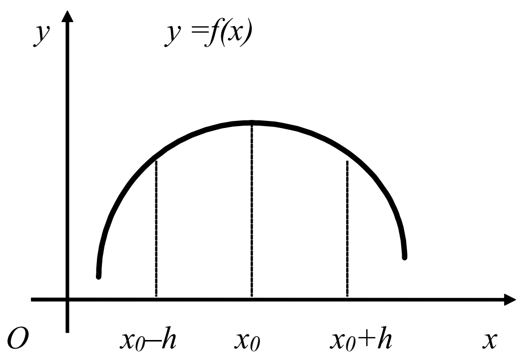


Рис. 2

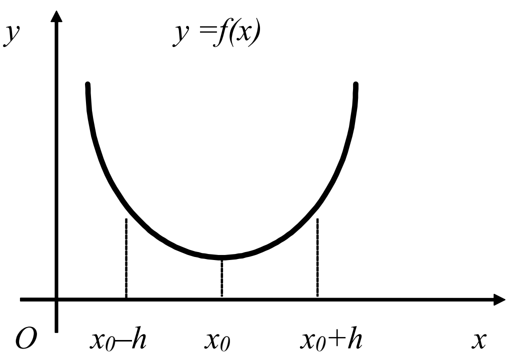


Рис. 3

Означення. Максимум і мінімум функції називаються ***екстремумами*** функції $y = f(x)$. Точка максимуму або мінімуму функції називається *точкою екстремуму*.

Н е о б х і д н а у м о в а і с н у в а н н я е к с т р е м у м у.

Для того, щоб функція $y = f(x)$ мала *екстремум в точці* x_0, *необхідно, щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю (* $f'(x_0) = 0$ *) або не існувала.*

Ця умова позначає, що в точці екстремуму функції $y = f(x)$ дотична паралельна осі *Ox* (рис.4). В точці екстремуму неперервної функції похідна може не існувати, наприклад в точці графік функції має злом (рис.5).

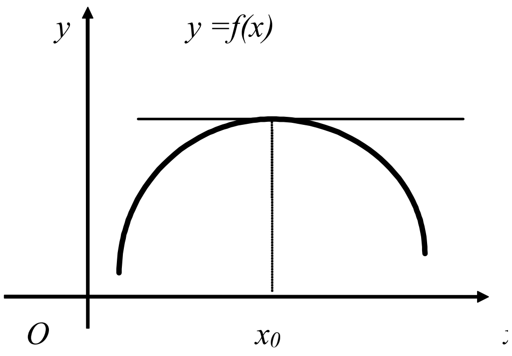


Рис.4

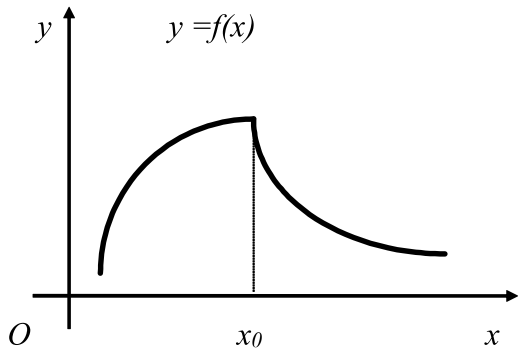


Рис. 5

Нагадаємо, що точки, в яких $f'(x_0)=0$ або $f'(x_0)$ не існує, називаються ***критичними точками.*** Не всяка критична точка є точкою екстремуму.

Достатні умови існування екстремуму.

1. **За знаком першої похідної**. Нехай x_0 – критична точка функції $y=f(x)$. Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна $f'(x)$ змінює знак з "+" на "–", то x_0 – точка максимуму, якщо з "–" на "+", то x_0 – точка мінімуму. Якщо знак похідної не змінюється, то функція в точці x_0 екстремуму не має.

2. **За знаком другої похідної**. Якщо $f'(x_0)=0$ і $f''(x_0)\neq 0$, то функція $y=f(x)$ в точці x_0 має максимум, якщо $f''(x_0)<0$, і мінімум, якщо $f''(x_0)>0$.

Схема дослідження функції на екстремум.

1. Знайти похідну $y'=f'(x)$.
2. Знайти критичні точки функції, в яких похідна дорівнює нулю $f'(x)=0$ або не існує.
3. Дослідити знак похідної зліва і справа від кожної критичної точки і зробити висновок о наявності екстремумів функції.
4. Знайти екстремуми функції і значення функції в точках екстремуму.

Приклад. Дослідити на екстремум функції $y=x(x-1)^3$.

Розв’язок.

1. Знаходимо похідну функції $y'=(x-1)^3+3x(x-1)^2=(x-1)^2(4x-1)$
2. З рівняння $(x-1)^2(4x-1)=0$ знаходимо критичні точки функції $x_1=\dfrac{1}{4}$; $x_2=1$. (Точок, в яких похідна не існує, у даної функції немає - $f'(x)$)

3. Нанесемо критичні точки на числову вісь (рис.6)

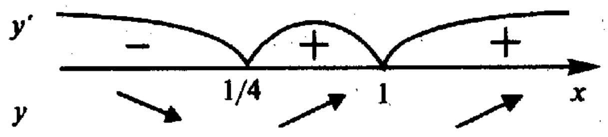


Рис.6

Для визначення знаку похідної зліва і справа від критичної точки $x_1 = \frac{1}{4}$ доберемо, наприклад, значення $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$ і знайдемо $f'(0) = -1 < 0$ і $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0$; отже, $f'(x) < 0$ при всіх $x < \frac{1}{4}$ и $f'(x) > 0$ на інтервалі $\left(\frac{1}{4};1\right)$.

Аналогічно встановлюємо, що $f'(x) > 0$ і на інтервалі $(1;+\infty)$.

Згідно достатньої умові $x = \frac{1}{4}$ - точка мінімуму даної функції. В точці $x = 1$ екстремуму немає.

4. Знаходимо $f_{\min}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)^3 = -\frac{27}{256}$.

Для знаходження найбільшого (найменшого) значення функції $y = f(x)$ **на відрізку** $[a;b]$ необхідно знайти значення функції на границях відрізку і в критичних точках, що належать цьому відрізку і обрати з них найбільше (найменше) значення.

Приклад. Зайти найбільше і найменше значення функції $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на відрізку $[-2;1]$.

Розв'язок.

1. Знайдемо похідну функції: $y' = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$;
2. Знаходимо критичні точки: $f'(x) = 0$ при $x_1 = 0$ і $x_2 = -1$. Обидві критичні точки належать відрізку $[-2;1]$.
3. Знайдемо значення функції на границях відрізка і в критичних точках:

$$f(0) = 0 + 0 + 1 = 1,$$

$$f(-1) = 3 - 4 + 1 = 0,$$

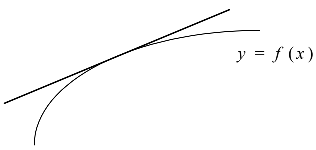
$$f(-2) = 48 - 32 + 1 = 17,$$

$$f(1) = 3 + 4 + 1 = 8.$$

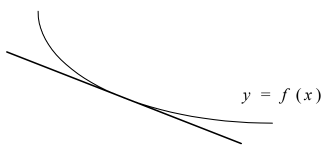
4. На відрізку $[-2;1]$ найбільше значення $f_{найб} = 17$ в точці $x = -2$.
5. На відрізку $[-2;1]$ найменше значення $f_{найм} = 0$ в точці $x = -1$.●

Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину

Означення. Крива $y = f(x)$ називається ***опуклою*** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче її довільної дотичної на цьому інтервалі.



Означення. Крива $y = f(x)$ називається ***вгнутою*** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище її довільної дотичної на цьому інтервалі.



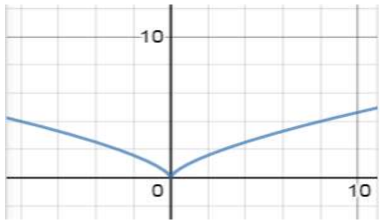
Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої.

Інтервали опуклості та вгнутості знаходять за допомогою наступної теореми.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на інтервалі (a,b), то::

1) якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a,b)$, то крива $y = f(x)$ опукла на (a,b);
2) якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a,b)$, то крива $y = f(x)$ вгнута на (a,b)

З теореми випливає, що в точці перегину друга похідна дорівнює нулю, якщо вона існує. Однак точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна не існує. Наприклад, точка $x = 0$ кривої $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.



Означення. Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує (а сама функція існує), називається ***критичними точками другого роду*** функції $y = f(x)$.

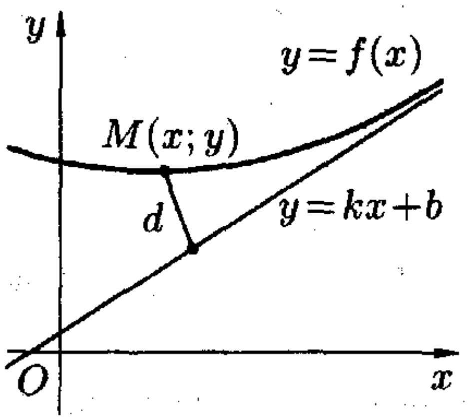
Встановимо умови існування точки перегину.

Теорема. Якщо при переході через критичну точку x_0 другого роду функції $f(x)$ похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину кривої $f(x)$.

Асимптоти графіка функції

Означення. ***Асимптотою кривої*** $y = f(x)$ називається пряма l, відстань d до якої від точки кривої прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки по кривій.

Асимптоти можуть бути ***вертикальними, похилими та горизонтальними.***



1. Пряма $x = a$ є ***вертикальною асимптотою*** графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ або $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, тобто в точці $x = a$ функція $f(x)$ має розрив ІІ роду.

2. Пряма $y = b$ є ***горизонтальною асимптотою*** графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

3. Пряма $y = kx + b$ є ***похилою асимптотою*** графіка функції $y = f(x)$, якщо існують границі:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right]$$

Зауваження щодо похилої асимптоти.

1. Якщо хоча б одна з вище названих границь з пункту 3 не існує або дорівнює нескінченності, то крива похилої асимптоти не має.
2. Якщо $k=0$, то $k=\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)$, тому $y=b$ - рівняння горизонтальної асимптоти. Оскільки це рівняння є окремим випадком рівняння похилої асимптоти, то часто розрізняють не три, а два види асимптот: вертикальні та невертикальні.
3. Асимптоти кривої $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$ можуть бути різні. Тому при знаходженні похилих асимптот потрібно обчислювати при $x\to+\infty$, а також при $x\to-\infty$.

Схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, доцільно виконати дії в певній послідовності.

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти (якщо можна) точки перетину графіка функції з осями координат.
3. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.
4. **Дослідити функцію на монотонність і екстремуми**:
   а) знайти першу похідну функції;
   б) знайти критичні точки, в яких похідна або дорівнює нулю або не існує;
   в) за допомогою знаків похідної визначити інтервали зростання і спадання функції;
   г) вказати максимуму і мінімуми (якщо вони є).
5. **Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину:**
   а)знайти другу похідну функції;
   б) знайти критичні точки другого роду, в яких друга похідна або дорівнює нулю або не існує;
   в) за допомогою знаків другої похідної визначити інтервали опуклості і вгнутості функції;
   г) вказати точки перегину (якщо вони є).
6. Перевірити функцію на наявність асимптот.

7. Обчислити координати додаткових точок.
8. Побудувати графік функції.

Приклад . Дослідити функцію $y=\frac{x}{1-x^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язок.

1. Функція не визначена при $x=1$ и $x=-1$. Область визначення складається з трьох інтервалів: $D(f): x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.
2. Якщо $x=0$, то $y=0$. Графік перетинає вісь Oy в точці $O(0;0)$.

   Якщо $y=0$, то $x=0$. Графік перетинає вісь Ox в точці O(0;0).
3. Функція $y=\frac{x}{1-x^2}$ є непарною: $f(-x)=\frac{-x}{1-(-x)^2}=-\frac{x}{1-x^2}=-f(x)$.
4. Знаходимо похідну $y'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

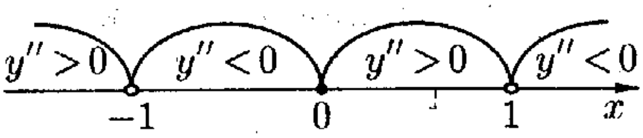
Критичними точками є точки $x_1=1$ і $x_2=-1$ (в цих точках похідна не існує).

Оскільки $y'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$, то $y'>0$ на усіх інтервалах. Функція на усіх інтервалах області визначення є зростаючою і екстремумів не має.

5. Дослідимо функцію на опуклість. Знаходимо другу похідну:

$$y''=\left(\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{2x(1-x^2)^2-(1+x^2)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$

Друга похідна дорівнює нулю в точці $x_1=0$ і не існує в точках, $x_2=-1$, $x_3=1$ (критичні точки другого порядку). Визначимо знаки другої похідної:



Графік функції опуклий на інтервалах $(-1;0)$ і $(1;\infty)$.

Графік функції вгнутий на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(0;1)$.

Точка $O(0;0)$ – точка перегину графіка функції.

6. Прямі $x=1$ и $x=-1$ є її вертикальними асимптотами, тому що

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x^2}=\infty$ та $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{1-x^2}=\infty$.

Перевіримо наявність похилої асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\infty 0}\frac{\frac{x}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1-x^2}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2}=0.$$

Отже, функція має горизонтальну асимптоту $y=0$.

Графік функції $y=\dfrac{x}{1-x^2}$