Лекція №7

«Аналітична геометрія»

Аналітична геометрія –- розділ геометрії, в якому геометричні фігури і їх властивості досліджуються засобами алгебри.

Властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь) установлюють засобами алгебри за допомогою методу координат

Під системою координат на площині розуміють спосіб, що дозволяє чисельно описати положення точки площини.

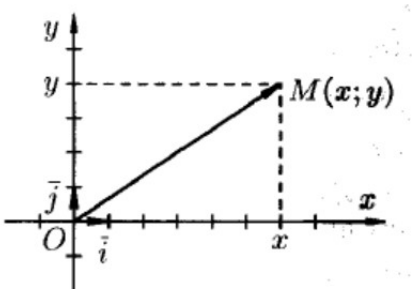
Розглянемо різні способи завдання системи координат на площині.

Прямокутна (декартова) система координат.

Найпоширенішою системою координат у математиці є декартова система координат, названа так на честь Рене Декарта.

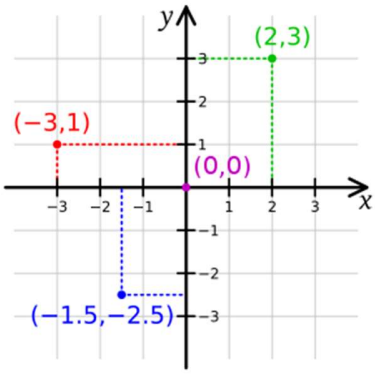
Рене́ Дека́рт (фр. René Descartes)
Роки життя: 1596 -1650.
Французький філософ, фізик, фізіолог, математик, основоположник аналітичної геометрії. У математиці Декарт запровадив декартову систему координат, дав поняття змінної величини і функції, ввів багато алгебраїчних позначень.

Прямокутна система координат на площині задається двома взаємно перпендикулярними прямими – осями, на кожній з яких обраний позитивний напрямок і заданий одиничний відрізок. Ці осі називають осями координат.



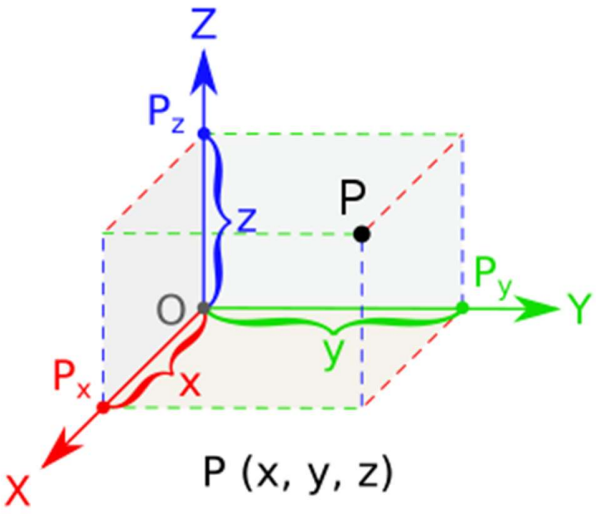
Точку їхнього перетинання O називають початком координат. Одну з осей називають віссю абсцис або віссю Ox, іншу – віссю ординат або віссю Oy.

Одиничні вектори осей позначають $\vec{i}$ і $\vec{j}$ ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$). Системи координат позначають Oxy, а площина, в якій розташована система координат, називають координатною площиною.



Вектор $\overline{OM}$ довільної точки M називається радіус-вектором точки M. Координати точки M в системі координат Oxy дорівнюють координатам радіус-вектора $\overline{OM}$. Якщо $\overline{OM} = (x; y)$, то координати точки M позначають як $M(x, y)$: число x називається абсцисою точки M, y - ординатою точки M.

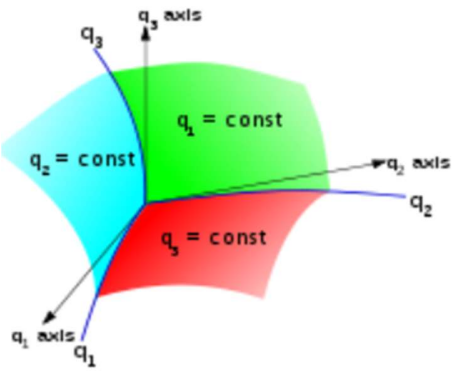
Числа x і y повністю визначають положення точки на площині, а саме: кожній парі чисел x і y відповідає єдина точка M площини, і навпаки.



В тривимірній системі декартових координат, точка P в XYZ - просторі локалізується вже за допомогою трьох параметрів: $(x; y; z)$.

- x - відстань від точки P до площини yz;
- y - відстань від точки P до площини xz
- z - відстань від точки P до площини xy xy

Криволінійна система координат.



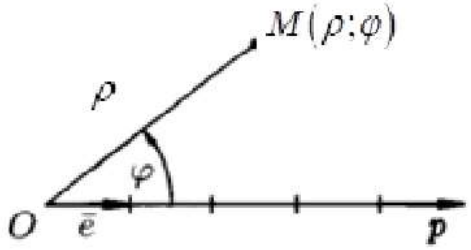
Криволінійна система координат – система координат в евклідовому просторі (простір, властивості якого описуються аксіомами евклідової геометрії).

Криволінійні координати не протиставляються прямолінійним. Прямолінійні координати є окремим випадком криволінійних координат.

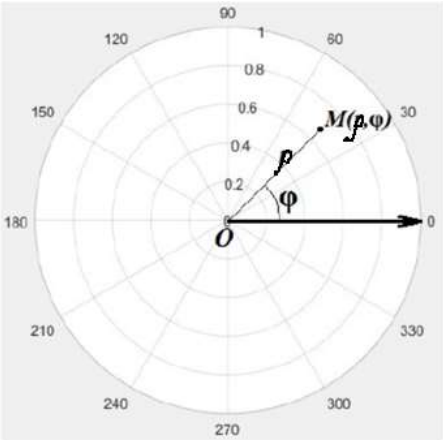
Криволінійні координати застосовуються зазвичай на площині ($n = 2$) і у просторі ($n = 3$). Число координат дорівнює розмірності простору.

Найбільш відомим прикладом криволінійної системи координат є полярні координати.

Полярна система координат



Полярна система координат задається точкою O, яка називається **полюсом**, і променем OA, який називається **полярною віссю**.



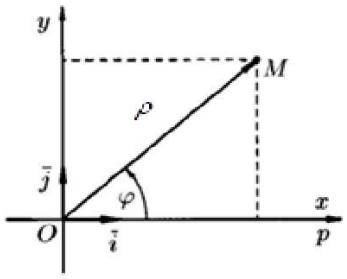
Положення точки M - визначається двійкою чисел $(\rho;\varphi)$, які називаються **полярними координатами** точки M, де ρ- відстань від полюса O до точки M і φ- кут, на який треба повернути полярну вісь OA до її збігу з OM, проти годинникової стрілки.

При цьому ρ називають **полярним радіусом,** φ**- полярним кутом**.

Полярний радіус ρ може змінюватися в межах $0 \le \rho < \infty$, полярний кут, як правило, змінюється в межах $-\pi \le \varphi < \pi$ (або $0 \le \varphi < 2\pi$).

У цьому випадку кожній точці площини (крім O) відповідає єдина пара чисел ρ і φ, і навпаки.

Встановимо зв'язок між прямокутними й полярними координатами. Для цього сполучимо полюс O з початком координат системи Oxy, а полярну вісь – з додатною піввіссю Ox. Нехай x і y - прямокутні координати точки M, а ρ і φ - її полярні координати.



Прямокутні координати точки M виражаються через полярні координати точки за формулами:

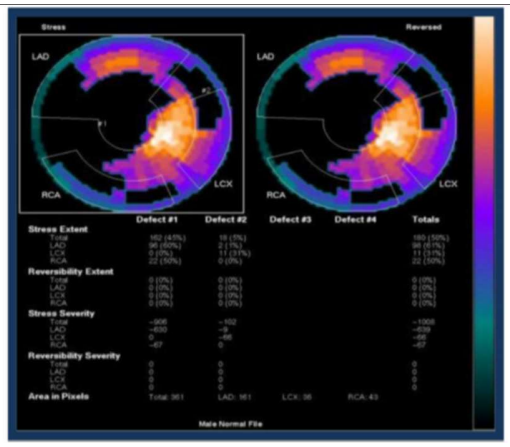
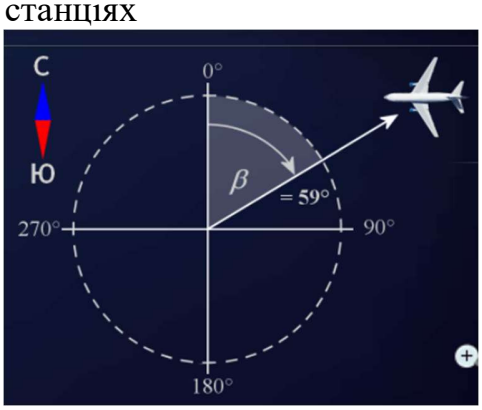
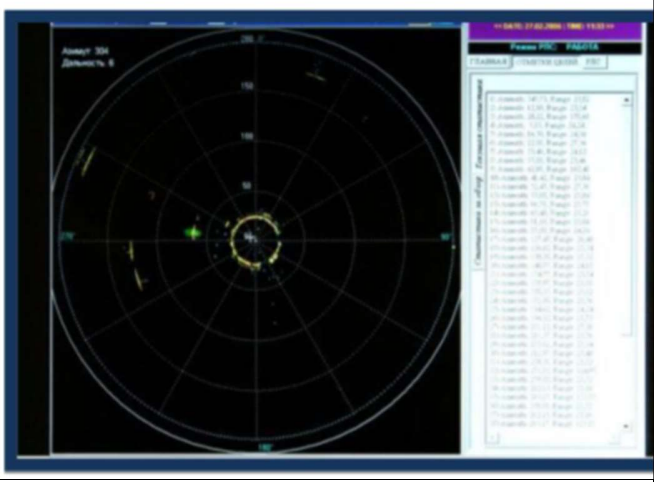
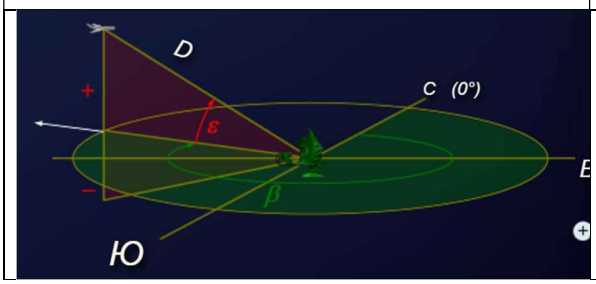
$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

Зауваження. Полярні ж координати точки M виражаються через її декартові координати такими формулами:

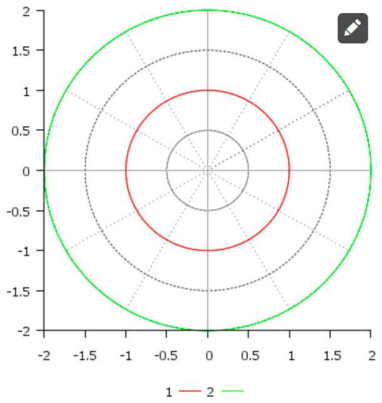
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Визначаючи величину φ, слід встановити (по знаках x і y) чверть, у якій лежить шуканий кут. Слід враховувати, що $-\pi \le \varphi < \pi$.

Застосування полярної системи координат.

В медицині комп'ютерна томографія серця виконується в полярній системі координат.	
Визначення цілі на радіолокаційних станціях 	
	

Рівняння кола в декартовій і полярній системі координат.



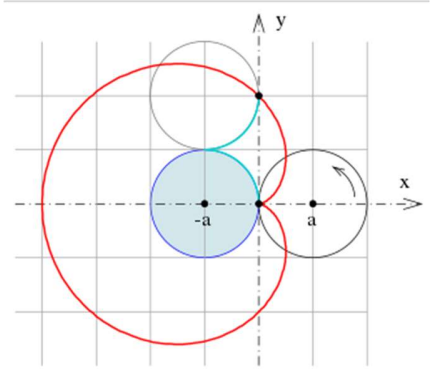
В прямокутних координатах:

- червоне коло: $x^2 + y^2 = 1$,
- зелене коло: $x^2 + y^2 = 4$

В полярних координатах:

- червоне коло: $r(t) = 1,\ t \in [0; 2\pi]$
- зелене коло: $r(t) = 2,\ t \in [0; 2\pi]$

Кардіоїда



- В прямокутних координатах:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0$$

- В прямокутних координатах (параметричний запис):

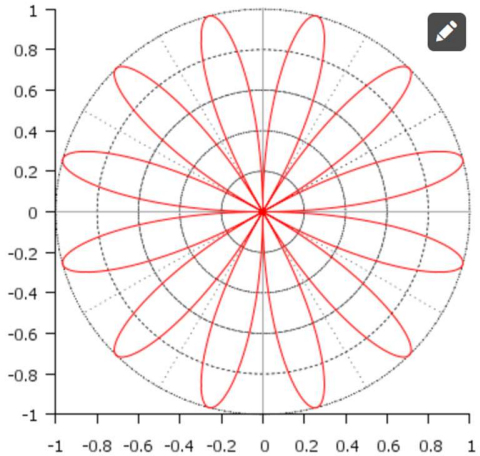
$$\begin{cases} x = 2a\cos t(1 + \cos t), \\ y = 2a\sin t(1 + \cos t) \end{cases}$$

- В полярних координатах:

$$r = a(1 - \cos\varphi)$$

Полярна роза

$r(t) = \sin(6t), \quad t \in [0; 2\pi]$



Рівняння лінії на площині.

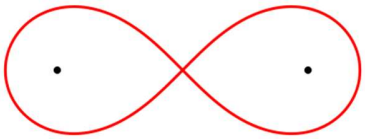
Можемо визначити лінію, як слід точки, що рухається.

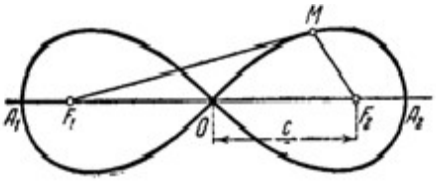
Рівняння лінії на площині можна задавати як в декартовій так і в полярній системі координат.

Наприклад, рівняння кола, у якого центр співпадає з центром координат

Наприклад рівняння лінії Лемніскати Бернуллі можна записати по різному.

Лемніската Бернуллі - геометричне місце точок, добуток відстаней від яких до двох заданих точок (фокусів) незмінна і дорівнює квадрату половини відстані між фокусами. Цю лемніскату називають в честь швейцарського математика Якоба Бернуллі, який поклав початок її вивченню.





Розглянемо простий випадок: якщо відстань між фокусами $2c$, розташовані вони на осі Ox і початок координат ділить відрізок між ними навпіл, то наступні рівняння задають лемніскату:

в декартовій системі координат

$\left(x^2+y^2\right)^2=2c^2\left(x^2-y^2\right)$ в неявному вигляді;

$y=\pm\sqrt{\sqrt{c^4+4x^2c^2}-x^2-c^2}$ в явному вигляді (коли y виразили через змінну x;

$$\begin{cases} x=c\sqrt{2}\dfrac{t+t^3}{1+t^4} \\ y=c\sqrt{2}\dfrac{t-t^3}{1+t^4} \end{cases},\quad t\in\left(-\infty,\infty\right)$$ в параметричному вигляді.

В полярній системі координат $r^2=2c^2\cos 2\varphi$.

Пряма на площині.

Найпростіша з ліній – це пряма.

Наведемо **основні види рівнянь прямої на площині**:

1) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ - рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n}=(A,B)$;

2) $Ax+By+C=0$ - загальне рівняння прямої,

де вектор $\vec{n}=(A,B)$ - нормальний вектор прямої;

3) $y=kx+b$ - рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; k - кутовий коефіцієнт прямої: $k=tg\alpha$, де α- кут між прямою і додатним напрямом осі Ox, b - ордината точки перетину прямої з віссю Oy;

4) $y-y_0=k(x-x_0)$ - рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0,y_0)$ у заданому напрямі, який задається кутовим коефіцієнтом k;

5) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ - рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{s}=(m,n)$ (канонічне рівняння);

6) $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}$

-параметричне рівняння прямої, де $t\in\mathbb{R}$ - параметр.

Ці рівняння у векторній формі мають вигляд :

$$\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{s}t,$$

де $\vec{r_0}=(x_0,y_0)$ - радіус-вектор точки $M_0(x_0,y_0)$, що належить прямій, $\vec{s}=(m,n)$ - напрямний вектор прямої;

7) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ - рівняння прямої у відрізках, a і b - величини напрямлених відрізків, що відтинаються прямою на координатних осях;

8) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$;

9) $x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$ - нормальне рівняння прямої, де $\cos\alpha$ та $\cos\beta$ - напрямні косинуси нормального вектора $\vec{n}$, $p\geq 0$ - відстань від початку координат до прямої.

Загальне рівняння прямої $Ax+By+C=0$ приводиться до нормального вигляду множенням на нормувальний множник

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

де знак перед коренем вибирається протилежним знаку вільного члена C.

Якщо $\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2)$ - нормальні вектори прямих l_1 та l_2 відповідно, то кут між ними визначається за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}.$$

Якщо k_1, k_2 - кутові коефіцієнти двох прямих, то кут φ між ними визначається за формулою

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\ \left(k_1k_2\neq-1\right).$$

Умова паралельності та перпендикулярності прямих l_1 та l_2:

$$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \quad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

або

$$l_1 \| l_2 \Leftrightarrow k_1k_2; \qquad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Якщо задано рівняння прямої l: $Ax + By + C = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0)$, то відстань від цієї точки до даної прямої обчислюється з формулою

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Площина та пряма у просторі.

Основні види рівнянь площини:

1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ - рівняння площини, що проходить через подану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n}(A, B, C)$;

2) $Ax + By + Cz + D = 0$ - загальне рівняння площини, де вектор $\vec{n}(A, B, C)$ - нормальний вектор площини;

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ - рівняння площини у відрізках, де a, b, c - довжини напрямлених відрізків, що відтинаються площиною на координатних осях;

4) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ - рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$;

5) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ - нормальне рівняння площини, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - напрямні косинуси нормального вектора $\vec{n}$, $p\geq 0$ - відстань від початку координат до площини.

Загальне рівняння площини $Ax+By+Cz+D=0$ приводиться до нормального вигляду множенням на нормувальний множник

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

де знак перед коренем вибирається протилежним знаку вільного члена D.

Кут між двома заданими площинами визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

$Q_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $Q_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ мають вигляд:

$$Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2};$$

$$Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Відстань $\rho(M_0,Q)$ від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини $Q: Ax+By+Cz+D=0$:

$$\rho(M_0,Q)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пряма у просторі. Основні види рівнянь прямої у просторі :

1) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases}$ - загальні рівняння прямої, що визначена перетином двох непаралельних площин;

2) $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ - параметричні рівняння прямої в просторі, де $t \in \mathbb{R}$ - параметр

Ці рівняння у векторній формі мають вигляд

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{s}t,$$

де $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ - радіус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить прямій, $\vec{s} = (m, n, p)$ - напрямний вектор прямої;

3) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ - канонічні рівняння прямої, де $A_0(x_0, y_0, z_0)$ - задана точка прямої, а вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ - напрямний вектор прямої;

4) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ - рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Кут між прямими

$L_1 : \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ і $L_2 : \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$

обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямих L_1 та L_2:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2};$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Відстань $\rho(M_0, L)$ **від точки** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **до прямої** L, де $L: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$, точка $A(x_1, y_1, z_1) \in L$, $\vec{s} = (m, n, p)$, визначається за формулою

$$\rho(M_0, L) = \frac{\left|\overrightarrow{AM_0} \times \vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}.$$

Щоб знайти **точку перетину прямої** $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ **і площини** $Ax + By + Cz + D = 0$, слід розв'язати таке спільно ці рівняння.

Кут між прямою $L: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ **і площиною** $Q: Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямої L **та площини** Q **:**

$$L \parallel Q \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0; \quad L \perp Q \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Умова належності двох прямих

$L_1 : \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$ і $L_2 : \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}$

одній площині така

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}\right) = 0 \qquad \text{або} \qquad \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0,$$

де $A_1\left(x_1, y_1, z_1\right) \in L_1$, $A_2\left(x_2, y_2, z_2\right) \in L_2$; $\vec{s_1} = \left(m_1, n_1, p_1\right)$, $\vec{s_2} = \left(m_2, n_2, p_2\right)$.

Прямі L_1 та L_2 мимобіжні (по рос. «перекрещивающиеся»), якщо

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Відстань між двома мимобіжними прямими L_1 та L_2 визначається за формулою :

$$\rho\left(L_1, L_2\right) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}\right)\right|}{\left|\vec{s_1} \times \vec{s_2}\right|}.$$