

Лекція 7

Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

Правило Лопіталя застосовують для розкриття невизначеностей $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Теорема. (Правило Лопіталя).

Якщо:

1) функції $f(x)$ і $g(x)$ в деякому околі точки $x = a$ (окрім, можливо самої точки a) неперервні і диференційовані;

2) функції $f(x)$ і $g(x)$ прямують до нуля або до нескінченності при $x \rightarrow a$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

3) $g'(x) \neq 0$;

4) існує границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна),

то існує і $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Зауваження.

1. Правило Лопіталя справедливе і при $a = \pm\infty$.

2. Правило Лопіталя може застосовуватись повторно. На кожному етапі застосування правила Лопіталя слід користуватись тотожними перетвореннями, що спрощують вираз, а також комбінувати це правило з будь-якими іншими способами обчислення границь, зокрема, використовувати еквівалентні нескінченно малі та нескінченно великі.

3. Слід пам'ятати, що $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ може існувати, а $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ не існує. Тоді правило Лопіталя не може бути застосовано.

4. У випадку невизначеностей типу $\{0 \cdot \infty\}$ або $\{\infty - \infty\}$ слід алгебраїчно перетворити функцію так, щоб привести її до невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ і тоді застосувати правило Лопіталя.

5. У випадку невизначеностей типу $\{0^0\}$ або $\{\infty^0\}$, або $\{1^\infty\}$ слід прологарифмувати дану функцію і знайти границю її логарифма.

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin 3x}$

Розв'язок.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin 3x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(\arcsin 3x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} e^{2x} \sqrt{1 - 9x^2} = \frac{2}{3}.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$

Розв'язок.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right)'}{(\ln(1-x))'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}}{\frac{-1}{1-x}} = -\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{0} = \infty.$$

За правилом Бернуллі — Лопіталя можна довести, що:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0.$$

Тобто, степенева функція $x^\alpha, \alpha > 0$, зростає не порівняно швидше логарифмічної і не порівняно повільніше показникової функції.

$$\boxed{\ln x \ll x^\alpha \ll e^x, x \rightarrow +\infty \forall \alpha > 0.}$$

Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої

Спочатку знайдемо рівняння дотичної до кривої. Нехай задана крива $y = f(x)$ і точка $M_0(x_0, y_0)$, яка належить цій лінії. Проведемо дотичну до кривої в точці M_0 (рис. 7).

Застосуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямку: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

За геометричним змістом похідної:
 $k = \operatorname{tg} \alpha = y'(x_0) = f'(x_0)$.

Тоді рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ буде мати вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (10)$$

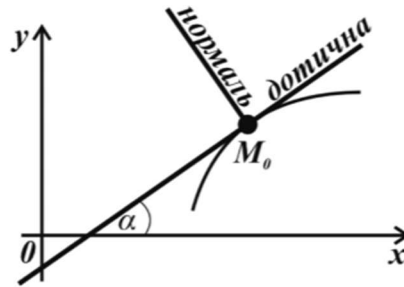


Рис. 7

Нормаль – пряма, яка проходить через точку дотику M_0 перпендикулярно дотичній.

Для того щоб записати рівняння нормалі, достатньо згадати умову перпендикулярності прямих: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Тоді рівняння нормалі буде мати вигляд:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (11)$$

Уважно розглянувши формули (10) і (11), робимо висновок: для того щоб скласти рівняння дотичної або нормалі до кривої $y = f(x)$ у заданій точці $M_0(x_0, y_0)$, необхідно:

1. Спочатку знайти похідну функції $y = f(x)$.
2. Потім знайти значення цієї похідної в заданій точці: $y_0 = f'(x_0)$
3. Підставити координати точки M_0 і значення похідної $f'(x_0)$ у відповідне рівняння.

Приклад. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$:

1) $y = x^2 - 4x$ $M_0(1; -3)$;

2) $y = e^x$ $M_0(0; 1)$;

3) $y = 3 \ln x - 4$ $M_0(1; -1)$.

Розв'язання.

1. Знайдемо похідну: $y' = 2x - 4$. Потім обчислимо похідну в заданій точці $M_0(1; -3)$: $y'(1) = f'(1) = -2$. Маючи на увазі, що $x_0 = 1$, $y_0 = -3$, запишемо рівняння дотичної (10):

$$y + 3 = (-2)(x - 1) \Rightarrow y + 3 = -2x + 2 \Rightarrow 2x + y + 1 = 0.$$

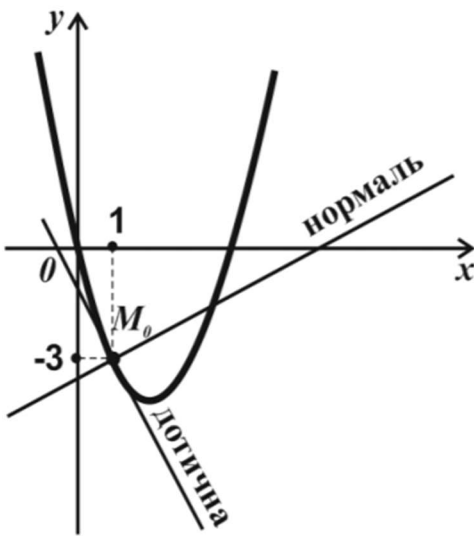


Рис. 8

Запишемо рівняння нормалі (11):

$$\begin{aligned} y + 3 &= \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y + 6 = x - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x - 2y - 7 = 0. \end{aligned}$$

На рис. (8): крива $y = x^2 - 4x$ (до речі, парабола), дотична і нормаль, які проведені до кривої в точці $M_0(1; -3)$.

2. Розв'язання аналогічне:

$$y = e^x; \quad y' = e^x; \quad y'(0) = 1.$$

Рівняння дотичної: $y - 1 = x \Rightarrow x - y + 1 = 0$.

Рівняння нормалі: $y - 1 = -x \Rightarrow x + y - 1 = 0$.

3. $y' = \frac{3}{x}$ $y'(1) = 3$.

Рівняння дотичної: $y + 1 = 3(x - 1) \Rightarrow 3x - y - 4 = 0$.

Рівняння нормалі: $y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow x + 3y + 2 = 0$.