Лекція 6

Елементи векторної алгебри

Основні поняття

Багато фізичних величини повністю визначаються завданням деякого числа. Це, наприклад, обсяг, маса, щільність, температура тіла та ін. Такі величини називаються скалярними. У зв'язку з цим числа іноді називають скалярами.

Інші величини, наприклад сила, швидкість, прискорення, визначаються не тільки своїм числовим значенням, а й напрямком. Наприклад, при русі тіла слід вказувати не тільки швидкість, з якою рухається тіло, а й напрямок руху (також і для сили). Такі величини називаються векторними. Векторна величина геометрично зображується за допомогою вектора.

Означення. Векторною величиною, або вектором (у широкому розумінні), називається будь-яка величина, що має напрям (наприклад, сила, що діє на матеріальну точку).

Означення. У математиці **вектор** - це напрямлений прямолінійний відрізок, тобто відрізок, який має певну довжину і певний напрям.

Означення. Вільним вектором $\vec{a}$ називається безліч всіх напрямлених відрізків, що мають однакову довжину і напрямок. Про всякий відрізок AB з цієї множини кажуть, що він представляє вектор $\vec{a}$.

З означення випливає, що вільний вектор без зміни довжини і напряму може бути перенесений в будь-яку точку простору.

Якщо в просторі задана прямокутна декартова система координат $Oxyz$, то точка M простору, що має координати x (абсциса), y (ордината) й z (апліката), позначається $M(x;y;z)$.

Будь-яка впорядкована пара точок A і B простору визначає напрямлений відрізок, тобто відрізок разом із заданим на ньому напрямком (рис.1). Якщо точка

A перша, то її називають **початком вектора**, а точку B - **кінцем вектора**. Напрямком вектора вважають напрямок від початку до кінця. Вектор позначається символом $\overline{AB}$ або $\overline{a}$.

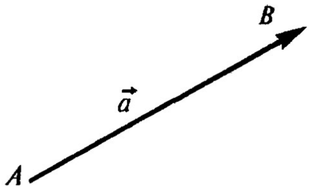


Рис. 1.

Якщо в просторі задані точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то ***координати вектора*** $\overline{AB}$ знаходять як $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Приклад. Задані точки: $A(2;5;-3)$; $B(4;-2;5)$

Знайти координати вектора $\overline{AB}$.

Розв'язок. $\overline{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a) = (4-2;-2-5;5+3) = (2;-7;8)$

Означення. Відстань між початком і кінцем вектора називається ***довжиною*** або **модулем вектора**, позначається $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$ і обчислюється як відстань між е точками A і B. Якщо вектор $\vec{a}$ задано координатами (x, y, z), то модуль вектора обчислюють за формулою $|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Наприклад, довжина вектора $\overline{a} = (4, -2, 6)$ обчислюється так:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{56}$$

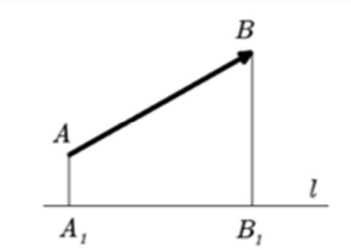
Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ задано координатами точок початку вектора $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінця вектора $B(x_2; y_2; z_2)$, то **довжину (модуль) вектора** знаходять за формулою

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Означення. Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається ***нульовим*** або нуль-вектором - $\bar{O}$. Напрям нуль-вектора довільний, довжина дорівнює нулю.

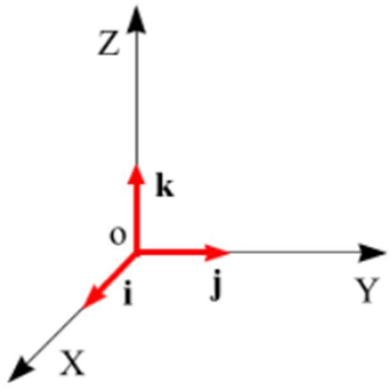
Означення. ***Проекцією*** вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називається число, модуль якого дорівнює довжині відрізка $|A_1B_1|$, що належить вісі l, де A_1 и B_1 - основи перпендикулярів, опущених із точок A і B на вісь l. ***Проекція*** вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l - додатне число, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l однаково напрямлені і від'ємне число, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l протилежно напрямлені.

Позначають: $Пр_l\bar{a}$



Проекція вектора $\bar{a}$ на ось l дорівнює довжині вектора, яка помножена на косинус кута між вектором і віссю $Пр_l\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$, де φ – кут між $\bar{a}$ і віссю l. Проекція вектора $\bar{a}$ на вісь l дорівнює 0, якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ і вісь l перпендикулярні.

Означення. ***Орт*** – вектор, довжина якого дорівнює 1. Ортами осей координат Ox, Oy и Oz відповідно називаються вектора $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ и $\vec{k} = (0,0,1)$. Це одиничні вектора, напрям кожного з них співпадає с додатним напрямком відповідної осі координат.



Будь який вектор в декартовому просторі може бути розкладений за ортами

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

a_x, a_y, a_z - проекції вектора $\vec{a}$ на відповідні осі координат, їх називають координатами вектора

Наприклад, $\bar{a} = (4,-2,6) = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k}$.

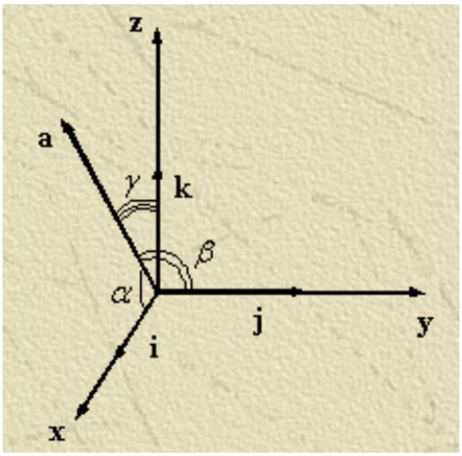
Означення. Вектора називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих (вони можуть бути напрямлені як в одну, так і в протилежні сторони). Позначення $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ колінеарний вектору $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, якщо їх координати пропорційні $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} = \lambda \neq 0$.

Нульовий вектор колінеарний до будь якого вектора.

Означення. Два вектора називаються ***рівними,*** якщо вони колінеарні, мають однакову довжину (модуль) та однаковий напрям.

Означення. Вектора називаються ***компланарними,*** якщо вони лежать на одній площині або на паралельних площинах.



Напрям вектора $\overline{a}$ визначається кутами α, β и γ, що утворені цим вектором з осями координат Ox, Oy и Oz. Косинуси цих кутів називаються **напрямними косинусами** вектора.

Якщо вектор $\vec{a}$ задано координатами (a_x, a_y, a_z), то напрямні косинуси знаходять по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \ \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Напрямні косинуси зв'язані співвідношенням:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Лінійні операції над векторами

До лінійних операцій над векторами відносяться:

- множення вектора на число;
- сума (або різниця) декількох векторів.

При додаванні (або відніманні) векторів їх однойменні координати додаються або віднімаються.

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z\right),$$
$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}$$

При множенні вектора на скаляр координати вектора множаться на цей скаляр.

$$\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k},$$
$$\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\right)$$

Протилежним вектором $-\overline{a}$ називається добуток вектора $\overline{a}$ на число (–1), тобто $-\overline{a}=(-1)\cdot\overline{a}$.

Скалярний добуток векторів

Означення. ***Кутом*** між ненульовими векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається величина найменшого з двох кутів, утворених цими векторами. Очевидно, що, якщо φ - кут між ненульовими векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то $0\le\varphi\le\pi$.

Означення. ***Скалярним добутком*** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi.$$

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$ може бути знайдено як сума добутків відповідних координат цих векторів:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z.$$

Приклад. Обчислити скалярний добуток векторів $\overline{a} = (3, -4, 2)$ и $\overline{b} = (1, 5, 1)$.

Рішення. $\overline{a} \cdot \overline{b} = 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 3 - 20 + 2 = -15$

Властивості скалярного добутку:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$
2) $(\lambda \overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda (\overline{a} \cdot \overline{b})$
3) $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$
4) Якщо вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональні (перпендикулярні), то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто якщо $\overline{a} \perp \overline{b}$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.
5) Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату его довжини

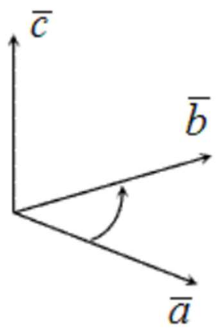
$$\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 = |\overline{a}|^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2$$

Кут φ **між векторами** $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ визначається як кут, $0 \le \varphi \le \pi$ для якого

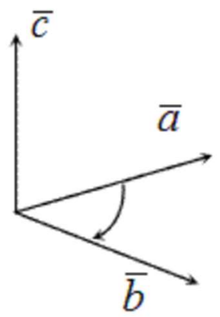
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Векторний добуток векторів

Три некомпланарних вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, взяті в указаному порядку, утворюють **праву трійку**, якщо з кінця третього вектора $\overline{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\overline{a}$ до другого вектора $\overline{b}$ спостерігається проти годинникової стрілки, і утворюють ліву трійку, якщо за годинниковою стрілкою.



Права трійка векторів



Ліва трійка векторів

Означення. ***Векторним добутком*** $\vec{a}\times\vec{b}$ неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ такий, що

1. $|\overline{c}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\sin\varphi$, де φ кут між векторами $\overline{a},\overline{b}$; $0<\varphi<\pi$ **.**

2. Вектор $\overline{c}$ ортогональний вектору $\overline{a}$ і вектору $\overline{b}$.

3. Трійка векторів $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ права.

Векторний добуток вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ позначають одним з наступних символів: $[\overline{a},\overline{b}]$ або $\overline{a}\times\overline{b}$.

Властивості векторного добутку

1. $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$
2. $\lambda(\overline{a}\times\overline{b})=(\lambda\overline{a})\times\overline{b}$
3. $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=(\overline{a}\times\overline{c})+(\overline{b}\times\overline{c})$
4. $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$ дорівнює площині паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

5. Для колінеарності ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ необхідно і достатньо, щоб їх векторний добуток дорівнював нулю.

Векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ векторів $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ и $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ **обчислюється за формулою**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}.$$

Приклад. Обчислить векторний добуток векторів $\overline{a}=(3,-4,2)$ і $\overline{b}=(1,5,1)$.

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 3 & -4 & 2\\ 1 & 5 & 1\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-14\overline{i}-\overline{j}+19\overline{k}.$$

Мішаний добуток векторів

Означення. ***Мішаним добутком векторів*** $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ називається результат скалярного множення векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$:

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Властивості мішаного добутку векторів.

1) Мішаний добуток $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, якщо вони утворюють праву трійку, або числу, протилежному цьому об'єму, якщо $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, – ліва тройка. Якщо $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні, то $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=0$.

2) $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$.

3) **Мішаний добуток трьох векторів дорівнює 0**, якщо:

а) хоча б один з векторів нульовий;

б) два вектора колінеарні;

в) три ненульових вектора лежать в одній площині або паралельні одній площині (компланарні).

3) Мішаний добуток не зміниться, якщо переставляти вектори в круговому порядку: $\overline{abc}=\overline{bca}=\overline{cab}=\overline{abc}$.

4) При перестановці любих двох векторів мішаний добуток змінює свій знак

$$\overline{bac}=-\overline{abc};\quad \overline{acb}=-\overline{cab}.$$

Якщо $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ и $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, то мішаний добуток цих векторів визначається за формулою

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приклад. Знайти мішаний добуток векторів $\overline{a} = (-3,2,-1)$, $\overline{b} = (2,1,0)$ і $\overline{c} = (-1,3,-1)$.

Рішення: $$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 6 - 1 - 0 + 4 = 0.$$

Мішаний добуток цих трьох векторів дорівнює 0, тому робимо висновок, що вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарні.