Лекція 5.

Розв'язок невизначених систем рівнянь

Порядок дослідження системи:

1) Привести розширену матрицю системи до ступінчастому вигляду.
2) Знаходимо $rangA$ і $rang\overline{A}$;
3) Якщо $rangA \neq rang\overline{A}$, система несумісна (система розв'язків не має).
4) Якщо $rangA = rang\overline{A} = r = n$ (числу невідомих), система сумісна і визначена (має єдиний розв'язок). Розв'язуємо систему, наприклад, методом Крамера, матричним методом або іншим методом.
5) Якщо $rangA = rang\overline{A} = r < n$, система сумісна і невизначена (має нескінченну кількість розв'язків). Виділяємо базисний мінор і базисні невідомі (невідомі, коефіцієнти при яких утворюють базисний мінор). Замінюємо дану систему рівносильною системою, що складається з тих рівнянь, до яких увійшли елементи базисного мінору і базисних невідомих. Знаходимо вираження базисних невідомих через вільні (використовуючи, наприклад, формули Крамера).

Наприклад, базисні невідомі: $x_1, x_2, ..., x_r$. Число базисних невідомих завжди дорівнює рангу матриці. Останні невідомі називаються вільними: $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$.

Визначення. Загальним розв'язком системи називається такий розв'язок, в якому базисні змінні виражені через вільні.

Визначення. Частинним розв'язком системи називається такий загальний розв'язок системи, в якому вільні змінні набули конкретного значення.

Визначення. Базисним розв'язком називається такий частинний розв'язок, в якому вільні змінні дорівнюють нулю.

Визначення. Фундаментальна система розв'язків виходить із загального розв'язка, якщо вільним невідомим надавати значення, що дорівнюють нулю і одному вільному невідомому надати значення рівне одиниці. Наприклад, якщо в загальному розв'язку є три вільні змінні, то отримуємо фундаментальну систему рішень послідовно надаючи такі значення вільним змінним: $(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)$

Приклад. Розв'язати систему: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$

Розв'язок. Знаходимо $rangA$ і $rang\overline{A}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 17 & 2 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -18 & -24 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -12 \end{array}\right)$$

$rangA = rang\overline{A} = 2$ $\quad n = 4$ (кількість невідомих 4: x_1, x_2, x_3, x_4)

В зв'язку з тим, що $r < n$ система рівнянь сумісна і невизначена (тобто має нескінченну кількість розв'язків).

Як базисний мінор виберемо ненульовий мінор другого порядку, оскільки $rangA = 2$.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 2 = 0$ - не може бути базисним мінором, тому що дорівнює нулю.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 3 = 1 \neq 0$ - може бути базисним мінором.

В зв'язку з тим, що при виборі базисного мінору обирали перший и третій стовпець, базисними невідомими є x_1, x_3, вільними - x_2, x_4.

Дана система рівносильна системі:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ \qquad\qquad x_3 - 9x_4 = -12 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 7 - 2x_2 - 4x_4 \\ \qquad x_3 = -12 + 9x_4 \end{cases}$$

Виразимо базисні невідомі через вільні:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 + 7 - 2x_2 - 4x_4 \\ x_3 = -12 + 9x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 43 - 2x_2 - 31x_4 \\ x_3 = -12 + 9x_4 \end{cases}$$

Означимо $x_2 = c_1$ и $x_4 = c_2$, де $c_1, c_2 \in R$

Загальний розв'язок:

$x_1 = 43 - 2c_1 - 31c_2$;

$x_2 = c_1$

$x_3 = -12 + 9c_2$

$x_4 = c_2$

Загальний розв'язок можна записати і як вектор:

$(43 - 2c_1 - 31c_2;\quad c_1\ ; -12 + 9c_2;\ c_2)$, де $c_1, c_2 \in R$

Знайдемо частинний розв'язок системи. Нагадаємо, що **частинним розв'язком** системи називається такий загальний розв'язок системи, в якому вільні змінні набули конкретного значення. Якщо прийняти, що $c_1 = 1;\ \ c_2 = 1$, то можна обчислити усі невідомі.

$x_1 = 43 - 2c_1 - 31c_2 = 43 - 2 \cdot 1 - 31 \cdot 1 = 10$;

$x_2 = c_1 = 1$;

$x_3 = -12 + 9c_2 = -12 + 9 \cdot 1 = -3$

$x_4 = c_2 = 1$

Відповідь: **частинний розв'язок**: $(10;1;-3;1)$

Зробимо перевірку частинного розв'язку: підставимо в систему рівнянь замість невідомих знайдені значення.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 + 2 - 9 + 4 = 7 \\ 20 + 4 - 21 - 1 = 2 \\ 50 + 10 - 51 + 2 = 11 \end{cases}$$

Знайдемо базисний розв'язок. Нагадаємо, що **базисним розв'язком** називається такий частинний розв'язок, в якому вільні змінні дорівнюють нулю $c_1 = 0;\ \ c_2 = 0$.

$x_1 = 43 - 2c_1 - 31c_2 = 43 - 2 \cdot 0 - 31 \cdot 0 = 43$;
$x_2 = c_1 = 0;$
$x_3 = -12 + 9c_2 = -12 + 9 \cdot 0 = -12$
$x_4 = c_2 = 0$
Базисний розв'язок: $(43;0;-12;0)$.

Знайдемо фундаментальну систему рішень. Нагадаємо, що фундаментальна система розв'язків виходить із загального розв'язка, якщо вільним невідомим надавати значення, що дорівнюють нулю і одному вільному невідомому надати значення рівне одиниці.

Фундаментальна система розв'язків:

Якщо $c_1 = 1$ і $c_2 = 0$, то (41;1;-12;0)

якщо $c_1 = 0$ і $c_2 = 1$, то (12;0;-3;1)

Розв'язання однорідних систем рівнянь.

Визначення. Система лінійних рівнянь **називається однорідною**, якщо усі вільні члени дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Однорідна система завжди сумісна, тому що $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ є розв'язком системи. Цей **розв'язок називається нульовим** або **тривіальним**.

Теорема 1. Для того, щоб система однорідних рівнянь мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці був менше числа невідомих, тобто $rangA < n$.

Теорема 2. Для того, щоб система з n однорідних рівнянь з n невідомими мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб визначник матриці системи дорівнював нулю.

Ранг	**Система рівнянь** $A \cdot X = 0$ **(**n **невідомих)**
$r = n$	Система визначена, має тільки тривіальний розв'язок
$r < n$	Система невизначена, має безліч розв'язків

Приклад. Розв'язати методом Гауса систему однорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування прикладу

1. Зведемо матрицю заданої системи до східчастого вигляду.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{S_1 \cdot (-2) + S_2 \\ S_1 \cdot (-1) + S_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \overset{S_2 \cdot (-1) + S_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислимо $\text{rang}A$ *і зробимо висновки про розв'язки системи рівнянь.*

Матриця системи має три ненульових рядки, отже $\text{rang}A = r = 3$, причому $r = n$. Таким чином, задана система рівнянь має **єдиний нульовий розв'язок**: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Приклад . Розв'язати методом Гауса систему однорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування прикладу

1. Зведемо матрицю заданої системи до східчастого вигляду.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \overset{-S_1+S_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 5 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \overset{\substack{S_1\cdot(-5)+S_2 \\ S_1\cdot(-3)+S_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{14} \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Відкинули другий рядок попередньої матриці, оскільки його елементи пропорціональні елементам третього рядка.

2. Обчислимо $\operatorname{rang} A$ *і зробимо висновки про розв'язки заданої системи рівнянь.*

Бачимо, що $\operatorname{rang} A = r = 2$, але $r < n\ (n = 3)$. Таким чином, задана система рівнянь має **нескінченну множину розв'язків**. Знайдемо їх.

3. Запишімо східчасту систему рівнянь, еквівалентну заданій.

З останньої матриці відновлюємо систему рівнянь.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 \qquad -4x_3 = 0, \\ \quad 2x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Виділимо в одержаній системі базисні та вільні невідомі.

Нехай базисними будуть невідомі x_1 і x_2, це можливо, оскільки мінор з коефіцієнтів при x_1 і x_2 $M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, x_3 − вільне невідоме.

Після перенесення вільного невідомого x_3 у праву частину рівнянь система набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1 \qquad -4x_3 = 0, \\ \quad 2x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \ \ 4x_3, \\ x_2 = -\dfrac{7}{2}x_3. \end{cases}$$

5. Запишімо загальний розв'язок системи рівнянь.

Покладемо $x_3 = c_3$, $c_3 \in R$. Одержимо загальний розв'язок заданої системи:

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 4c_3, \\ x_2 = -\dfrac{7}{2}c_3, \\ x_3 = c_3,\ c_3 \in R. \end{cases}$$

Приклад . Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування прикладу

1. Зведемо матрицю заданої системи до східчастого вигляду.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \underset{S_1\cdot(-4)+S_4}{\overset{\substack{S_1\cdot(-3)+S_2 \\ S_1\cdot(-4)+S_3}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{-18} & \cancel{15} \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{12} & \cancel{-10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тут відкинули два останні рядки тому, що їхні елементи пропорціональні елементам другого рядка.

2. Обчислимо $\operatorname{rang}A$ *і зробимо висновки про розв'язки заданої системи рівнянь.*

Маємо $\operatorname{rang}A = r = 2$, $r < n\ (n = 4)$. Отже, задана система рівнянь має **нескінченну множину розв'язків.**

3. Запишімо східчасту систему рівнянь, еквівалентну заданій.

З останньої матриці відновлюємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ \quad\ \ - x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Виділимо в одержаній системі базисні та вільні невідомі.

Нехай базисними будуть невідомі x_1 і x_2 $\left(M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$.

Вільні невідомі x_3 і x_4 перенесемо в праву частину рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4, \\ \qquad x_2 = -6x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

5. Знайдемо загальний розв'язок системи рівнянь.

Надамо вільним невідомим x_3 і x_4 довільні значення c_3 і c_4 відповідно і виразимо базисні невідомі x_1 і x_2 через c_3 і c_4 − виконаємо зворотний хід методу Гауса.

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 8c_3 - 7c_4, \\ x_2 = -6c_3 + 5c_4, \\ x_3 = c_3, \\ x_4 = c_4, \quad c_3, c_4 \in R. \end{cases}$$

Таким чином, маємо загальний розв'язок заданої системи рівнянь $\left(8c_3 - 7c_4; -6c_3 + 5c_4; c_3; c_4\right)$, $c_3, c_4 \in R$.

6. Запишіть фундаментальну систему розв'язків.

При $c_3 = 1, c_4 = 0$, маємо $(8; -6; 1; 0)$.

При $c_3 = 0, c_4 = 1$, маємо $(-7; 5; 0; 1)$.