Лекція 4.

Системи лінійних рівнянь.

Визначення. Системою лінійних рівнянь називається система рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

де a_{ij}, b_i - числа, x_j - невідомі, n – число невідомих, m – число рівнянь.

Числа a_{ij} - називають коефіцієнтами системи, а числа b_i - вільними членами.

Визначення. ***Розв'язком лінійної системи рівнянь*** називають набір чисел, які при підстановці замість невідомих обертають кожне рівняння системи у вірну рівність.

Зауваження. Лінійна система рівнянь може мати:

- єдиний розв'язок,
- безліч розв'язків;
- не має жодного розв'язка.

Визначення. Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язка.

Визначення. Сумісна система рівнянь називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок; і ***невизначеною***, якщо вона має безліч розв'язків.

Наприклад,

а) система рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20, \\ x_1 - x_2 = 10. \end{cases}$ - сумісна і визначена, тому що має один розв'язок $(10;0)$;

б) система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15. \end{cases}$ - несумісна, тому що не мати жодного розв'язка;

в) система рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20. \end{cases}$ - сумісна і невизначена, тому що має безліч розв'язків ($x_1 = c, \quad x_2 = 10 - 2c$, де с – довільне число). Частинні розв'язки цієї системи $(0;10)$; $(1;8)$; $(2;6)$; $(3;4)$.

Визначення. Дві системи рівнянь називаються **рівносильними**, або **еквівалентними**, якщо вони мають одну і ту ж множину розв'язків.

Іншими словами, системи еквівалентні, якщо кожний розв'язок однієї системи рівнянь є розв'язком іншої, і навпаки.

Зауваження. Еквівалентні системи виходять, зокрема, при елементарних перетвореннях системи за умови, що перетворення виконуються над рядками матриці.

Визначення. Система лінійних рівнянь називається **однорідною**, якщо усі вільні члени системи дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однорідна система завжди сумісна, тому що $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ є розв'язком системи. Цей розв'язок називають нульовим або тривіальним.

Леопо́льд Кро́некер (1823- 1891) – німецький математик. (Бог створив цілі числа, усе інше — діло рук людини).
Альфре́до Капе́лли (1855 -1910) - італійський математик.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система з m рівнянь з n невідомими мала рішення необхідно і достатньо, щоб ранг матриці A системи дорівнював рангу її розширеної матриці: $rang A = rang \overline{A}$.

Розширеною матрицею $\overline{A}$ системи називають матрицю, що складена з матриці A и стовпця вільних членів.

Пример 1. Дослідити на сумісність систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 = -2. \end{cases}$$

Запишімо матрицю системи A і розширену матрицю системи $\overline{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Приведемо матрицю к східчастому вигляду, щоб визначити ранг матриці

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & | & 1\\ 3 & 3 & | & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & | & -5\end{pmatrix}. \quad rangA=1, \quad rang\overline{A}=2.$$

Отримали $rangA\neq rang\overline{A}$, за теоремою Кронекера-Капеллі система несумісна (не має розв'язків).

Приклад 2. Дослідити на сумісність систему рівнянь і випадку її сумісності – розв'язати її.

$$\begin{cases}3x_1 & -x_2 & +2x_3 & =1,\\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & =1,\\ 2x_1 & -3x_2 & -x_3 & =10,\\ 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =-1.\end{cases}$$

Розв'язок:

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & | & 1\\ 1 & 2 & 1 & | & 1\\ 2 & -3 & -1 & | & 10\\ 3 & 2 & 3 & | & -1\end{pmatrix}=\begin{Bmatrix}S_1\leftrightarrow S_2\\ \\ \\ \end{Bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & | & 1\\ 3 & -1 & 2 & | & 1\\ 2 & -3 & -1 & | & 10\\ 3 & 2 & 3 & | & -1\end{pmatrix}\sim\begin{Bmatrix}S_1\\ S_1\cdot(-3)+S_2\\ S_1\cdot(-2)+S_3\\ S_1\cdot(-3)+S_4\end{Bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & | & 1\\ 0 & -7 & -1 & | & -2\\ 0 & -7 & -3 & | & 8\\ 0 & -4 & 0 & | & -4\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{Bmatrix}S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4:(-4)\end{Bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & | & 1\\ 0 & -7 & -1 & | & -2\\ 0 & -7 & -3 & | & 8\\ 0 & 1 & 0 & | & 1\end{pmatrix}\sim\begin{Bmatrix}\\ S_2\leftrightarrow S_4\\ \\ \end{Bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & | & 1\\ 0 & 1 & 0 & | & 1\\ 0 & -7 & -3 & | & 8\\ 0 & -7 & -1 & | & -2\end{pmatrix}\sim\begin{Bmatrix}S_1\\ S_2\\ S_2\cdot(7)+S_3\\ S_2\cdot(7)+S_4\end{Bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & | & 1\\ 0 & 1 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & -3 & | & 15\\ 0 & 0 & -1 & | & 5\end{pmatrix}\sim\begin{Bmatrix}\\ \\ S_3:(-3)\\ \\ \end{Bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & | & 1\\ 0 & 1 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & -5\\ 0 & 0 & -1 & | & 5\end{pmatrix}\sim\begin{Bmatrix}S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_3+S_4\end{Bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & | & 1\\ 0 & 1 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & -5\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & | & 1\\ 0 & 1 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & -5\end{pmatrix}$$

$rangA=rang\overline{A}=3=n$, тому за теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна. Ранг системи дорівнює числу невідомих, тому система має єдиний розв'язок.

Знайдемо його

$$\begin{cases}x_1 & +2x_2 & +x_3 & =1,\\ & x_2 & & =1,\\ & & x_3 & =-5.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1-2x_2-x_3,\\ x_2=1,\\ x_3=-5.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=4,\\ x_2=1,\\ x_3=-5.\end{cases}$$

Перевірка: $x_1 = 4;\ x_2 = 1;\ x_3 = -5$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} 3\cdot 4 - 1 + 2\cdot(-5) = 1 \\ 4 + 2\cdot 1 + (-5) = 1 \\ 2\cdot 4 - 3\cdot 1 - (-5) = 10 \\ 3\cdot 4 + 2\cdot 1 + 3\cdot(-5) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12-1-10 = 1, \\ 4+2-5 = 1, \\ 8-3+5 = 10, \\ 12+2-15 = -1. \end{cases} = \begin{cases} 1 = 1, \\ 1 = 1, \\ 10 = 10, \\ -1 = -1. \end{cases}$$

Відповідь: (4;1;-5).

Системи n лінійних рівнянь з n невідомими. Розв’язок невироджених систем методом Крамера и матричним методом.

Якщо задана система n лінійних рівнянь з n невідомими, то для неї можна застосувати теорему Крамера.

Теорема Крамера. *Нехай* Δ *- визначник матриці системи A, а* Δ_j *- визначник матриці, отриманої з матриці A заміною* j *-го стовпця стовпцем вільних членів . Тоді, якщо* $\Delta \neq 0$*, то система має єдиний розв’язок, що визначається за формулами:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \qquad x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Ці формули отримали назву *формул Крамера*.

Приклад 1. Розв’язати систему рівнянь за формулами Крамера: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$

Розв’язок: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14$.

За формулами Крамера отримуємо: $x_1 = \frac{7}{7} = 1$, $x_2 = \frac{14}{7} = 2$.

Перевірка: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} 2\cdot 1 - 2 = 0, \\ 1 + 3\cdot 2 = 7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0, \\ 7 = 7. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Розв'язок: Знайдемо визначник системи $\Delta = |A|$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot2 + (-1)\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot1 - 1\cdot1\cdot1 - 1\cdot1\cdot1 - 2\cdot(-1)\cdot2 = .$$

$$= 2 - 1 + 2 - 1 - 1 + 4 = 5$$

Визначник Δ було обчислено методом трикутника. Раніше вже відмічалось, що визначник 3-го порядку можна обчислювати будь-яким з 4 методів.

В зв'язку з тим, що $\Delta = 5 \neq 0$, за теоремою Крамера система має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники матриць $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, отриманих з матриці A, заміною відповідно першого, другого і третього стовпців стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5 .$$

Примітка. Визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ обчислюймо одним з 4 методів для визначників третього порядку (див. лекцію 2).

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1 ,$$

тобто розв'язок системи $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Відповідь: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$

Матричний метод розв'язання системи.

Нехай дана система *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

або у вигляді матричного рівняння $A \cdot X = B$, де

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Основна матриця A такої системи квадратна. Визначник цієї матриці $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ називається визначником системи.

Якщо визначник системи відрізняється від нуля, система називається невиродженою.

Знайдемо розв'язок даної системи $\Delta \neq 0$.

Множачи зліва обидві частини матричного рівняння $A \cdot X = B$ на матрицю A^{-1}, отримуємо $A^{-1}\left(AX\right)=A^{-1}B$.

Оскільки $A^{-1}\left(AX\right)=\left(A^{-1}A\right)X=EX=X$, то розв'язком системи матричним методом буде матриця-стовпець

$$X=A^{-1}B.$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=3, \\ x_1-5x_2+3x_3=-1, \\ x_1-x_2+x_3=1. \end{cases}$$

Розв'язок:

Маємо:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |A|=-8.$$

Обчислимо обернену матрицю за алгоритмом (див. лекцію 3). В результаті отримуємо:

$$A^{-1} = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

(див. алгоритм знаходження оберненої матриці).

Знаходимо матрицю X, виходячи з того, що $X = A^{-1}B$:

$$X = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2\cdot 3+3(-1)-7\cdot 1 \\ 2\cdot 3+1(-1)-5\cdot 1 \\ 4\cdot 3-2(-1)-6\cdot 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

тобто $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ - розв’язок даної системи.

Перевірка: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 2\cdot 2 - 4\cdot 0 + (-1) = 3, \\ 2 - 5\cdot 0 + 3\cdot(-1) = -1, \\ 2 - 0 + (-1) = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3, \\ -1 = -1, \\ 1 = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$

Метод Гауса

Одним з найбільш універсальних і ефективних методів вирішень лінійних систем рівнянь є метод Гауса.

Метод Гауса - метод послідовного виключення змінних - полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система рівнянь приводиться до рівносильної системи ступінчастого (або трикутного) вигляду, з якого послідовно, починаючи з останніх (за номером) змінних, знаходяться усі останні змінні.

Приклад. Розв’язати методом Гауса систему неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв’язування прикладу

1. Зведемо розширену матрицю системи до східчастого вигляду.

Поміняємо місцями перше і третє рівняння системи для того, щоб коефіцієнт a_{11} дорівнював одиниці. Далі проведемо елементарні перетворення матриці (прямий хід методу Гауса).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{S_1 \leftrightarrow S_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{S_1\cdot(-3)+S_2 \\ S_1\cdot(-2)+S_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{S_3\cdot(-3)+S_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{S_2\cdot 3+S_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{array}\right).$$

2. Знайдемо $\operatorname{rang} A$ *і* $\operatorname{rang} \overline{A}$.

Бачимо, що і матриця A, і розширена матриця $\overline{A}$ мають три ненульових рядки. Отже, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = r = 3$, з чого за теоремою Кронекера-Капеллі випливає, що система сумісна. Оскільки $r = n = 3$, то система рівнянь **визначена, тобто має єдиний розв'язок.** Знайдемо його.

3. Запишімо еквівалентну заданій східчасту систему рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ \quad - x_2 + 2x_3 = -5, \\ \qquad 5x_3 = -15. \end{cases}$$

4. Виконаємо зворотний хід методу Гауса.

Знаходимо невідомі, розв'язуючи систему рівнянь знизу вверх.

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2 - x_3 = 1 - 2 + 3 = 2, \\ x_2 = 5 + 2x_3 = 5 - 6 = -1, \\ x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Таким чином отримали єдиний розв'язок системи рівнянь.

Перевірка: $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -3$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \begin{cases} 2 \cdot 2 - (-1) + (-3) = 2, \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) = -2, \\ 2 - 2 \cdot (-1) + (-3) = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 1 - 3 = 2 \\ 6 - 2 - 6 = -2 \\ 2 + 2 - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ -2 = -2 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -3$.

Приклад. Розв'язати методом Гауса систему неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

Розв'язування прикладу

1. Зведемо розширену матрицю системи до східчастого вигляду.

Проведемо елементарні перетворення розширеної матриці $\overline{A}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{S_1\cdot(-2)+S_2 \\ -S_1+S_3 \\ -S_1+S_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} S_2+S_3 \\ \sim \\ \\ -S_2+S_4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +6 \end{array}\right) \overset{S_3+S_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

2. Знайдемо $\mathrm{rang}A$ *і* $\mathrm{rang}\overline{A}$. *Зробимо висновки про розв'язки заданої системи рівнянь.*

Бачимо, що $\mathrm{rang}A = 2$ (матриця A має два ненульових рядка), а $\mathrm{rang}\overline{A} = 3$.

З цього випливає, що дана **система розв'язків не має.**

Відповідь: система розв'язків не має.