Лекція 2

Визначники квадратних матриць

Квадратній матриці A порядку n можна поставити у відповідність певне число, яке називається визначником матриці або детермінантом.

Означення. ***Визначником*** (детермінантом) квадратної матриці A n-го порядку називається число, що обчислюється з елементів матриці A за спеціальним правилом. Визначником матриці A n-го порядку називається алгебраїчна сума всіх можливих добутків n елементів матриці, узятих по одному з кожного її рядка і кожного стовпця. Якщо в кожному добутку перші індекси розміщені в порядку зростання, то знак добутку дорівнює $(-1)^s$, де s - число інверсій у переставленні других індексів.

Визначник матриці A позначається $|A|$ або Δ, ΔA, $\det A$ і обчислюється за загальною формулою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n}, \qquad (1)$$

де $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ - переставлення чисел $1, 2, \dots, n$.

Оскільки загальне число переставлень із n елементів дорівнює $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, кожний визначник розкладається на n різних добутків, половина з яких береться зі знаком «$+$», а друга половина зі знаком «$-$».

Існують прості правила для обчислення визначників першого, другого і третього порядків.

Означення. ***Визначником*** матриці першого порядку $A = (a_{11})$, називається елемент a_{11}: $\Delta_1 = |A| = a_{11}$. Наприклад для матриці $A = (3)$ визначником є $\Delta_1 = |A| = 3$.

Означення. ***Визначником*** квадратної матриці другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число, що обчислюється за формулою:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2)$$

Як бачимо, визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів, що стоять на головній і побічних діагоналях.

Наприклад, якщо матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, тоді визначник цієї матриці дорівнює $\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7$.

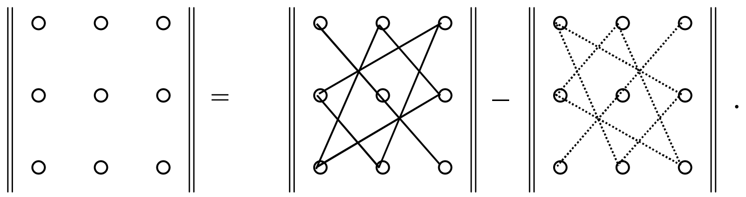
Визначник третього порядку можливо обчислити деякими способами.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Згідно формули (1):

$$\begin{aligned}\Delta_3=\left|A\right|&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-\\ &-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}\end{aligned} \qquad (3)$$

Це число представляє суму, що складається з 6 доданків, кожне з яких є добутком трьох елементів визначника. У кожен доданок входить рівно по одному елементу з кожного рядка і стовпця матриці. Правило обчислення визначника третього порядку легко запам'ятати, користуючись схемою, яка називається правилом трикутників або правилом Саррюса:



Наприклад. Обчислимо визначник третього порядку

$$\left|A\right|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\Delta=1\cdot5\cdot10+2\cdot6\cdot7+4\cdot8\cdot3-7\cdot5\cdot3-8\cdot6\cdot1-2\cdot4\cdot10=\\ &=50+84+96-105-48-80=-3\end{aligned}.$$

Визначник третього порядку можна обчислити наступними способами:

1) Метод трикутника (лише для визначників 3-го порядку);
2) Метод діагоналей (лише для визначників 3-го порядку);
3) Розкладання визначника по елементах рядка (стовпця) - теорема Лапласа (застосовується для визначника будь-якого порядку, наприклад, 4, 5 порядку);
4) Методом приведення визначника до трикутного вигляду (застосовується для визначника будь-якого порядку);

Для того, щоб розглянути методи 3 і 4, буде потрібно деякі додаткові поняття.

Нехай дана квадратна матриця n-го порядку.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Означення. ***Мінором*** M_{ij} елемента a_{ij} матриці n-го порядку називається визначник нової матриці, яка утворюється з даної матриці внаслідок викреслювання рядка і стовпця, які перетинаються на цьому елементі (тобто для елемента a_{ij} викреслюють i-й рядок и j-й стовпець).

Наприклад, мінором елемента a_{12} матриці A буде визначник:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}.$$

Кожна матриця n-го порядку має n^2 мінорів $(n-1)$-го порядку.

Означення. ***Алгебраїчним доповненням*** A_{ij} *елемента* a_{ij} n*-го порядку* називається мінор, що беруть зі знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}, \tag{4}$$

тобто алгебраїчне доповнення співпадає з мінором, коли сума номерів рядка і стовпця $(i+j)$- парне число, і відрізняється від мінору знаком, коли $(i+j)$- непарне число.

Наприклад, $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$; $A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=M_{31}$.

Приклад. Знайти алгебраїчні доповнення усіх елементів матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

○ Розв’язання.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=-3;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=6;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=-3;$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix}=42;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{vmatrix}=-12;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 7 & 8\end{vmatrix}=-22;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-27;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=6;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=13$$

Велике значення для обчислення визначників має наступна теорема.

Теорема Лапласа. *Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:*

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}A_{is} \tag{1.6}$$

(розклад за елементами i-го рядка; $i=1;2;\ldots;n$);

$$\Delta=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{s=1}^{n}a_{sj}A_{sj} \tag{1.7}$$

(розклад за елементами j-го стовпця; $j=1;2;\ldots;n$);

Приклад. Обчислити визначник матриці:

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}$$

Розв’язання. Обчислимо визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(-1)^2\cdot(-1\cdot4-(-1)\cdot2)+1\cdot(-1)^3\cdot(4\cdot4-3\cdot2)+4\cdot(-1)^4\cdot(4\cdot(-1)-3\cdot(-1))=$$
$$=2\cdot1\cdot(-2)+1\cdot(-1)\cdot10+4\cdot1\cdot(-1)=-4-10-4=-18$$

Обчислимо визначник за елементами другого рядка.

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=4\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 4\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 4\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot(-1)\cdot8+(-1)\cdot1\cdot4+2\cdot(-1)\cdot(-5)=-32+4+10=-18$$

Обчислимо визначник за елементами третього стовпця.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot(-1)\cdot(-5) + 4\cdot 1\cdot(-6) = -4 + 10 - 24 = -18$$

Приклад. Обчислити визначник трикутної матриці:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Розв’язання. Обчислимо визначник за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$

$$= 5\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 5\cdot(-1)\cdot(3\cdot 1 - 0\cdot 1) =$$

$$= 5\cdot(-1)\cdot 3\cdot 1 = -15.$$

На даному прикладі ми переконалися в тому, що визначник трикутної (і, очевидно, діагональної) матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Значення теореми Лапласа полягає в тому, що дозволяє звести обчислення визначників n-го порядку до обчислення простіших визначників $(n-1)$-го порядку.

Властивості визначників

Властивість 1. *Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то знак визначника зміниться на протилежний.*

Властивість 2. *Загальний множник елементів деякого рядка (стовпця) визначника може бути винесеним за знак визначника.*

Зауваження. За знак визначника можна виносити загальний множник будь-якого рядка або стовпця на відміну від матриці, за знак якої можна виносити загальний множник лише всіх елементів.

Наприклад, $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$

$$= 2\cdot 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix},$$

Для матриць $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Властивість 3. Величина визначника не зміниться при його транспонуванні (якщо його рядки зробити стовпцями з тими ж номерами).: $\left|A^T\right| = |A|$

Властивість 4. *Якщо всі елементи деякого рядка дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.*

Властивість 5. *Якщо квадратна матриця містить два однакові рядки (стовпця), то її визначник дорівнює 0.*

Властивість 6. Якщо елементи двох рядків (стовпців) матриці пропорційні, то її визначник дорівнює 0.

Властивість 7. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів.

Властивість 8. *Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці додати елементи іншого рядка (стовпця), що помножені на одне і те ж число.*

Пераховані властивості визначників дозволяють істотно спростити їх обчислення, особливо для визначників високих порядків. При обчисленні визначників доцільно так перетворити вихідну матрицю за допомогою властивостей, щоб перетворена матриця мала рядок (або стовпець), що містить якомога більше нулів, а потім обчислити визначник розкладанням по цьому рядку (стовпцю).

Приклад. Обчислити визначник матриці четвертого порядку:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Розв'язання: Спочатку обчислимо визначник за елементами першого рядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 24 - 6\cdot(-10) + 1\cdot(-36) - 4\cdot 8 =$$

$$= 48 + 60 - 36 - 32 = 40$$

Цей же самий визначник обчислимо використовуючи властивості визначника:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 + S_1\cdot(-2) \\ S_3 + S_1\cdot(-4) \\ S_4 + S_1\cdot(-3) \end{matrix} \right\} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 + S_2\cdot 3 \\ S_4 + S_2\cdot 2 \end{matrix} \right\} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 + S_3\cdot(-1) \end{matrix} \right\} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot 1\cdot 2\cdot(-4)\cdot 5 = 40$$