Лекція 10

Границя функції (продовження)**.**

Нескінченна велика функція

Означення. **Функція** $y = f(x)$ **називається нескінченно великою** при $x \to x_0$, якщо для довільного, будь-якого великого додатного числа *M*, можна знайти таке $\delta > 0$, що для всіх значень x, що відрізняються від x_0 і задовольняють умові $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.

Записують

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

або $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Коротко це означення можна записати так:

$$\boxed{\left(\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x:\ |x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0 \implies |f(x)| > M\right) \iff \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.}$$

Наприклад, функція $y = \dfrac{1}{x-5}$ - є нескінченно велика функція при $x \to 5$

Якщо $f(x)$ прямує до нескінченності при $x \to x_0$ и при цьому приймає тільки додатні або тільки від'ємні значення, відповідно пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Властивості нескінченно великих величин:

1. Добуток нескінченно великої величини на функцію, границя якої відрізняється від нуля, є величина нескінченно велика.
2. Сума нескінченно великої величини і обмеженої функції є величина нескінченно велика.
3. Частка від ділення нескінченно великої величини на функцію, що має скінченну границю, є величина нескінченно велика.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно малою при*** $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Аналогічно визначається нескінченно мала функція при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Нескінченно малі функції часто називають нескінченно малими величинами або нескінченно малими; позначають **грецькими буквами** α, β *і* т.д.

Наприклад,

1) функція $\alpha = \sin x$ є нескінченно малою при $x \to 0$;
2) функція $\alpha = \frac{1}{x}$ є нескінченно малою при $x \to \infty$;
3) функція $\alpha = x - 1$ є нескінченно мала при $x \to 1$.

Властивості нескінченно малих величин:

1. Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.

2. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу функцію є функція нескінченно мала.

3. Добуток двох нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала.

4. Добуток нескінченно малої функції на число є функція нескінченно мала.

5. Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, що має відмінну від нуля границю, є функція нескінченно мала.

Зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими величинами.

Теорема. Якщо функція $\alpha(x)$ – нескінченно мала ($\alpha(x) \neq 0$), то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно велика функція. И навпаки: якщо функція $\alpha(x)$– нескінченно велика, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ - нескінченно мала функція.

Наприклад,

1) функція $y = \cos x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ є величина нескінченно мала, а функція $y = \frac{1}{\cos x}$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ є величина нескінченно велика;
2) функція $y = \sqrt{5x-7}$ при $x \to \infty$ є величина нескінченно велика, а функція $y = \frac{1}{\sqrt{5x-7}}$ при $x \to \infty$ є величина нескінченно мала.

Основні теореми о границях

Сформулюємо без доказів ряд теорем о границях, на яких засновуються практичні правила обчислення границь.

Нехай існують скінченні границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to x_0$, де x_0 – число або $\pm\infty$.

Теорема 1. *Сталу можна виносити за знак границі*:

$$\lim_{x\to x_0}(Cf(x)) = C\lim_{x\to x_0}(f(x)).$$

Теорема 2. *Границя суми* (*різниці*) *двох функцій дорівнює сумі* (*різниці*) *границі цих функцій*:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 3. *Границя добутку функцій дорівнює добутку границь цих функцій*:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Теорема 4. *Границя відношення функцій дорівнює відношенню границі цих функцій*:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \text{ при } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

Теорема 5. *Границя степеня дорівнює степеню границі*:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^m = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^m, \text{ где } m \in N.$$

Теорема 6. *Якщо* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$, *то*:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, *за умови, що* $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$, *для всіх x*, що задовольняють умові $|x - x_0| < \varepsilon$, *де* $\varepsilon > 0$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, *за умови, що* $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, *для всіх x*, що задовольняють що умові $|x - x_0| < \varepsilon$, *де* $\varepsilon > 0$.

Теорема 7. (**о границі проміжної функції**). *Якщо функція* $f(x)$ *знаходиться між двома функціями* $\varphi(x)$ *і* $g(x)$, *що прямують до однієї границі, то функція* $f(x)$ *також прямує до цієї границі , тобто якщо*

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ і $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

Практичні правила обчислення границь функцій.

При обчисленні границь спочатку необхідно аргумент функції замінити його граничним значенням.

1) Якщо функція є елементарною і якщо граничне значення x_0 входить в область визначення функції, то границя функції дорівнює значенню функції при $x = x_0$, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \text{ якщо } x_0 \in D(f)$$

2) В інших випадках можемо отримати або визначенні значення або невизначеності різних типів.
Якщо $c = const$, маємо такі **співвідношення-визначеності:**

1).. $\frac{c}{0} = \infty,\ c \neq 0$; 2) $\frac{\infty}{0} = \infty$; 3) $\frac{c}{\infty} = 0$;

4) $\frac{0}{\infty} = 0$; 5) $c \cdot \infty = \infty,\ c \neq 0$; 6) $\infty \cdot \infty = \infty$;

7) $\infty + \infty = \infty$; 8) $0^{\infty} = 0$; 9) $\infty^{\infty} = \infty$.

Підстановка граничного значення часто призводить до **невизначеностей вигляду**:

$$\left\{\frac{0}{0}\right\},\ \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},\ \{0 \cdot \infty\},\ \{\infty - \infty\},\ \left\{1^{\infty}\right\},\ \left\{\infty^{0}\right\},\ \left\{0^{0}\right\}.$$

Для розкриття невизначеностей спочатку виконують перетворення, а потім переходять до границі.

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{x \to 1}(3x^2 - 2x + 7)$.

Розв'язок. $\lim_{x \to 1}(3x^2 - 2x + 7) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 7 = 8$

Приклад 2. Знайти границю $\lim_{x \to 5} \frac{3x + 5}{x - 5}$.

Розв'язок.. $\lim_{x \to 5} \frac{3x + 5}{x - 5} = \frac{3 \cdot 5 + 5}{5 - 5} = \frac{20}{0} = \infty$.

Приклад 3. Знайти границю $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$.

Розв'язок. Тут застосувати теорему про границю дробу не можна, оскільки границя знаменника при $x \to 2$, дорівнює 0. Окрім того, границя чисельника дорівнює 0. В таких випадках кажуть, що є невизначеність вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+16)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

Розв'язок. Тут є невизначеність вигляду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Для знаходження даної границі поділимо чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Зауваження. Функція $2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}$ є сума числа 2 и нескінченно малих функцій, тому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=2$; аналогічно $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=4$.

Мають велике значення наступні так звані **перша і друга важливі границі**:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ – ***перша важлива границя***;
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=2,71828...$ – ***друга важлива границя.***

Наслідки з першої важливої границі:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$.

Наслідки з другої важливої границі:

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Приклад 5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$.

Розв'язок. Маємо невизначеність вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Теорему о границі дробу застосувати неможливо.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{2\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}.$$

Приклад 6. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Розв'язок.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x=\left\{1^\infty\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{\frac{2x}{2}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

Еквівалентні нескінченно малі функції

Порівняння нескінченно малих функцій.

Як відомо, сума, різниця і добуток двох нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала. Відношення ж двох нескінченно малих функцій може поводитися різним чином: бути кінцевим числом, бути нескінченно великою функцією, нескінченно малою або взагалі не прямувати ні до якого числа.

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою їх відношення.

Нехай $\alpha=\alpha(x)$ и $\beta=\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x\to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \text{ и } \lim_{x\to x_0}\beta(x)=0.$$

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$, то α и β називаються *нескінченно малими одного порядку.*
2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}$ то α називаються *нескінченно малою вищого порядку,* ніж β.
3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}$ то α і β називаються еквівалентними *нескінченно малими. Позначають* $\alpha\sim\beta$
4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\infty$, то α називаються *нескінченно малою нижчого порядку*, ніж β.

Відмітимо, що такі самі правила порівняння нескінченно малих функцій для $x\to\pm\infty$, $x\to x_0\pm 0$.

Еквівалентні нескінченно малі і основні теореми про них.

Серед нескінченно малих функцій одного порядку важливу роль грають еквівалентні нескінченно малі ($\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=1$). Позначаються як $\alpha\sim\beta$

Наприклад, $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, так як $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Теорема 1. Границя відношення двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо кожну або одну з них замінити на еквівалентну їй нескінченну малу.

Теорема 2. Різниця двох нескінченно малих функцій є нескінченна мала вищого порядку, ніж кожна з них.

Теорема 3. Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку самого низького порядку.

Доданок, що є еквівалентним сумі нескінченно малих, називається *головною частиною цієї суми*.

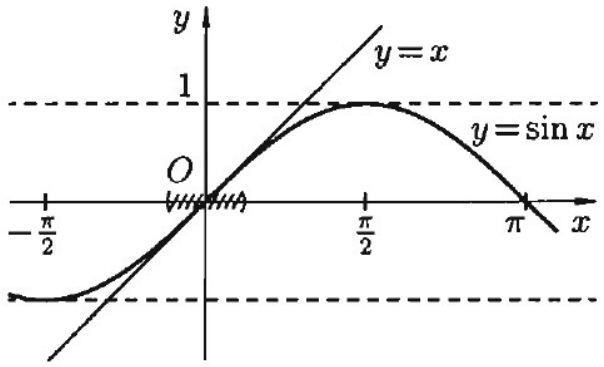
Заміна суми нескінченно малих функцій її головною частиною називається *відкиданням нескінченно малих вищого порядку*.

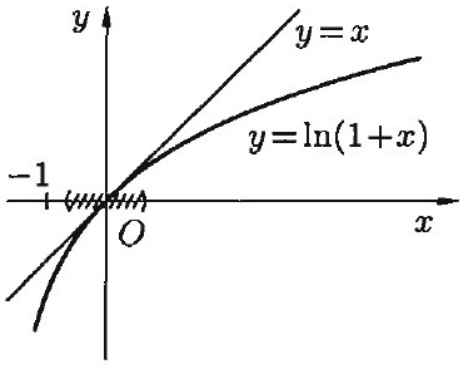
Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+7x^2}{\sin 2x}$.

Розв'язок.. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+7x^2}{\sin 2x}=\left|\begin{array}{c} x\to 0 \\ 3x+7x^2\sim 3x \\ \sin 2x\sim 2x \end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

Таблиця еквівалентних нескінченних малих

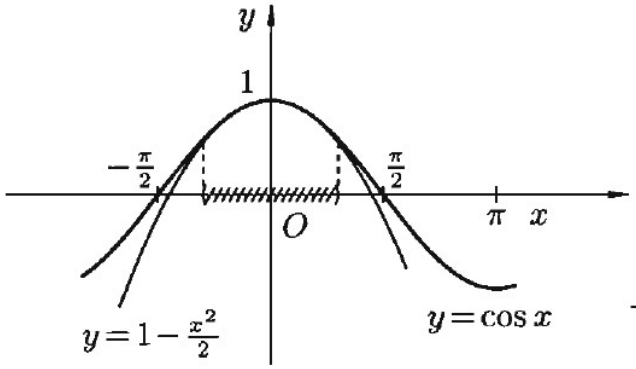
1. $\sin x\sim x$ при $x\to 0$	6. $e^x-1\sim x$ при $x\to 0$
2. $tgx\sim x$ при $x\to 0$	7. $a^x-1\sim x\cdot\ln a$ при $x\to 0$
3. $arc\sin x\sim x$ при $x\to 0$	8. $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$
4. $arctgx\sim x$ при $x\to 0$	9. $\log_a(1+x)\sim x\cdot\log_a e$ при $x\to 0$
5. $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ при $x\to 0$	10. $(1+x)^k-1\sim k\cdot x,\quad k>0$ при $x\to 0$; Зокрема, $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$

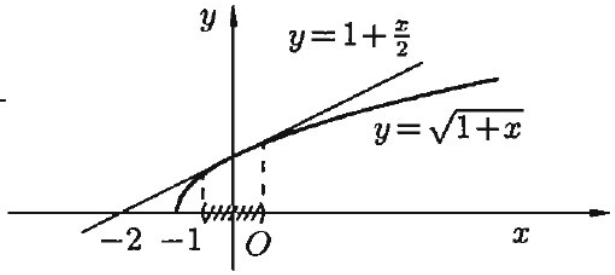




$\sin x \approx x \ (x \to 0)$

$\ln(1+x) \approx x \ (x \to 0)$





$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \ (x \to 0)$

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \ (x \to 0)$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,2x}{\sin 3x}$.

Розв'язок.

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\,2x}{\sin 3x} = \left| \begin{array}{c} x \to 0 \\ tg\,2x \sim 2x \\ \sin 3x \sim 3x \end{array} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}$.

Розв'язок.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4} = \left| \begin{array}{c} x \to 1 \\ \arcsin(x-1) \sim (x-1) \end{array} \right| \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{3}.$$