Диференціал функції та його властивості

Згадаємо теорему.

Теорема о зв'язку функції, її границі і нескінченно малої функції. Якщо функція $y = f(x)$ має границю, що дорівнює A, то її можна представити як суму числа A і нескінченно малої функції α, тобто

$$\text{якщо } \lim_{\Delta x \to 0} f(x) = A, \text{ то } f(x) = A + \alpha .$$

Нехай функція $y = f(x)$ у точці x має відмінну від нуля похідну $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тоді, згідно теоремі о зв'язку функції, її границі і нескінченно малої функції, можна записати $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Таким чином, приріст функції $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. Приріст функції представляє собою суму двох нескінченно малих функції. При цьому перша функція є нескінченно мала функція одного порядку с Δx, так як $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а друга функція є нескінченно мала функція більш високого порядку, ніж Δx: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$

Тому величину $f'(x) \cdot \Delta x$ називають ***головною частиною*** приросту функції Δy.

<u>Означення</u>. ***Диференціалом*** dy функції $y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx, частину її приросту Δy, що дорівнює добутку похідної функції у цій точці на приріст аргументу:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x . \qquad (1)$$

Диференціал dy називають також *диференціалом першого порядку*.

Знайдемо диференціал незалежної змінної x, тобто диференціал функції $y = x$. Оскільки $y' = 1$, то $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, тобто диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту: $dx = \Delta x$, тобто формулу (1) можна записати у вигляді:

$$dy = f'(x)dx. \tag{2}$$

Таким чином, <u>диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної</u>.

З формули (2) випливає, що $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, тобто позначення похідної $\dfrac{dy}{dx}$ можна розглядати як відношення диференціалів dy та dx.

Приклад. Знайти диференціал функції $y = 3x^3 - 3\sin 3x$. Обчисліть диференціал при $x = 0$, $dx = 0,01$

Розв'язання. Оскільки $y'(x) = 9x^2 - 9\cos 3x = 9\left(x^2 - \cos 3x\right)$, то диференціал $dy = 9\left(x^2 - \cos 3x\right)dx$.

$$dy = 9\left((0)^2 - \cos 0\right) \cdot 0,01 = 9 \cdot (-1) \cdot 0,01 = -0,09$$

Геометричний зміст диференціалу.

З геометричної точки зору **диференціал функції** $y = f(x)$ у точці x **дорівнює приросту ординати дотичної** до графіка функції у цій точці, коли змінна x отримує приріст Δx.

Пояснімо це.

Розглянемо криву $y = f(x)$ (рис.1) Візьмемо на кривій довільну точку $M(x, y)$. Проведемо дотичну до кривої в цій точці (кут нахилу α). Пригадаємо, що $tg\alpha = k = y'$. Надамо аргументу x приросту Δx. Тоді функція $y = f(x)$ набуде приросту Δy. Розглянемо трикутник MNP:

$$tg\alpha = \frac{NP}{MN} \text{ або } y' = \frac{NP}{MN}.$$

Звідси

$$NP = y' \cdot MN = y' \cdot \Delta x = y' \cdot dx = dy$$

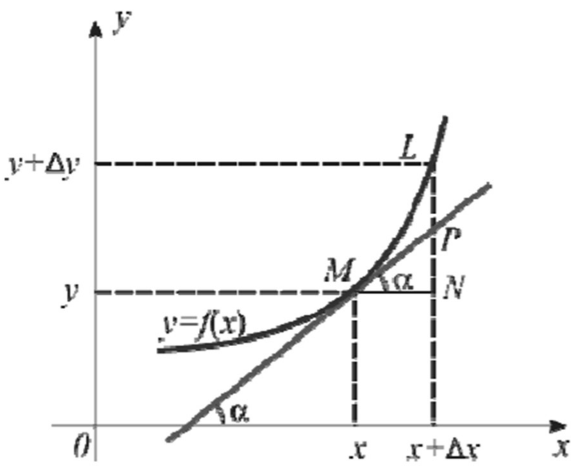

Рис.1

Тобто геометричний зміст диференціала – це приріст ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці x.

Зауваження. Зазначимо, що на рис.1 приріст функції Δy складається з двох доданків NP і PL (де $NP = dy$). Не слід думати, що приріст Δy завжди більше диференціала dy. Достатньо розглянути іншу криву (рис.2), для якої $dy > \Delta y$ ($NP > NL$).

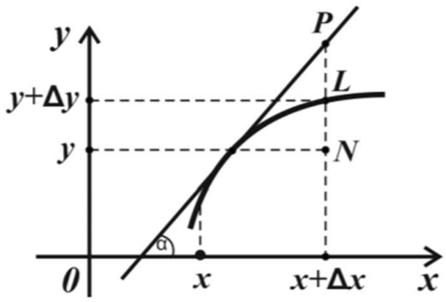

Рис.2

Механічний зміст диференціала

З'ясуємо механічний зміст диференціала. Нехай матеріальна точка рухається за відомим законом $s = s(t)$. Диференціал функції $s(t)$ $ds = s'(t)\Delta t$ при фіксованих значеннях t і Δt – це той шлях, який пройшла б матеріальна точка за час Δt, якби вона рухалася рівномірно і прямолінійно із сталою швидкістю $v = s'(t)$. Зрозуміло, що фактичний шлях Δs у випадку нерівномірного руху матеріальної точки, на відміну від диференціала ds не є лінійною функцією часу Δt і тому відрізняється від шляху ds. Проте, якщо час Δt є достатньо малим, то швидкість руху не встигає суттєво змінитись і тому рух точки на проміжку часу від t до $t+\Delta t$ є майже рівномірним.

Основні формули, пов’язані з диференціалами, можна отримати, використовуючи зв’язок між диференціалом функції та її похідною ($dy = y'(x)dx$) та відповідні формули для похідних.

Нехай $u(x)$ та $v(x)$ – диференційовані функції і $c = const$. Тоді виконуються наступні рівності:

1. $d(c) = 0$,
2. $d(cu) = cdu$
3. $d(u+v) = du + dv$.
4. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Доведемо, наприклад, останню формулу. За означенням диференціала маємо:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Теорема про диференціал складеної функції. Диференціал складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на диференціал цього проміжного аргументу.

Доведення. Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – диференційовані функції, що утворюють складену функцію $y = f(\varphi(x))$. Тоді $y'(x) = f'_u \cdot u'_x$, диференціал $dy = f'(x)dx = f'_u \cdot u'_x dx = f'_u \cdot du$.

Таким чином, $dy = f'_x dx = f'_u du$, тобто перший диференціал функції $y(x)$ визначається однією й тією ж формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною, чи функцією іншого аргументу. Цю властивість диференціала першого порядку називають *інваріантністю (незмінністю) форми першого диференціала*.

Таблиця диференціалів.

1	$d(c)=0, \quad c=const$	10	$d\left(ctgx\right)=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$
2	$d(x^n)=nx^{n-1}dx$	11	$d\left(\arcsin x\right)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
3	$d(a^x)=a^x\ln a dx$	12	$d\left(\arccos x\right)=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$d(e^x)=e^x dx$	13	$d\left(arctgx\right)=\dfrac{dx}{1+x^2}$
5	$d\left(\log_a x\right)=\dfrac{dx}{x\ln a}$	14	$d\left(arcctgx\right)=-\dfrac{dx}{1+x^2}$
6	$d\left(\ln x\right)=\dfrac{dx}{x}$	15	$d(shx)=chxdx$
7	$d(\sin x)=\cos xdx$	16	$d(chx)=shxdx$
8	$d(\cos x)=-\sin xdx$	17	$d\left(thx\right)=\dfrac{dx}{ch^2x}$
9	$d\left(tgx\right)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$	18	$d\left(cthx\right)=-\dfrac{dx}{sh^2x}$

Застосування диференціала до наближених обчислень

Як вже зазначалося, приріст Δy функції $y=f\left(x\right)$ у точці x можна наближено замінити диференціалом dy у цій точці: $\Delta y\approx dy$. Підставивши сюди значення Δy і dy, отримаємо наближену формулу:

$$f\left(x+\Delta x\right)\approx f\left(x\right)+f'\left(x\right)\Delta x. \tag{4}$$

Абсолютна похибка величини $\Delta y - dy$ при $\Delta x \to 0$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx, тому, що при $f'(x) \neq 0$ величини Δy і dy є еквівалентними нескінченно малими:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1.$$

Тут $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Можна довести, що абсолютна похибка формули (4) не перевищує величини $M \cdot (\Delta x)^2$, де M – максимальне значення $|f''(x)|$ при $x \in [x; x + \Delta x]$.

Приклад. Обчислити наближено $arctg1,01$.

Розв'язання. Маємо: $f(x) = arctgx$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. При $x = 1$ і $\Delta x = 0,01$ за формулою (4) отримаємо:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

$$arctg(1 + 0,01) \approx arctg1 + \frac{1}{1+1^2} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{4} + 0,005 \approx 0,79.$$

Диференціали вищих порядків

Нехай $y = f(x)$ – диференційована функція незалежної змінної x. Тоді її диференціал $dy = f'(x)dx$ теж є функцією аргументу x і можна знайти диференціал цієї функції. Диференціал диференціала функції $y = f(x)$ називають її *другим диференціалом*, або *диференціалом другого порядку*. Його позначають d^2y або $d^2 f(x)$.

Знайдемо вираз для d^2y.

$$d^2y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)' dx = f''(x)dx^2.$$

Таким чином, отримали формулу:

$$d^2y = f''(x)dx^2. \qquad (5)$$

Аналогічно можна визначити диференціал третього поряду як диференціал диференціала другого порядку:

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(f''(x)dx^2\right) = \left(f''(x)dx^2\right)' dx = f'''(x)dx^3.$$

Означення. *Диференціалом* n*-го порядку* називають диференціал диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right) = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (6)$$

З формули (6) випливає, що n-у похідну функції $y = f(x)$ можна записати у вигляді відношення її диференціала n-го порядку до n-го степеня диференціала незалежної змінної: $y^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Наведені вище формули для диференціалів вищих порядків є вірними, якщо x є незалежною змінною. Якщо ж змінна x є функцією незалежної змінної t, тобто $x = x(t)$, то

$$d^2 y = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Таким чином, якщо у функції $y = f(x)$ змінна x є залежною змінною ($x = x(t)$), то $d^2 y \neq f''(x)dx^2$. Ми бачимо, що диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності форми.

Приклад. Знайти диференціал третього порядку функції $y = e^{5x}$, де x – незалежна змінна.

Розв'язання. Оскільки потрібно знайти диференціал третього порядку функції незалежної змінної, то можна використати формулу (6) при $n = 3$, тобто маємо: $d^3 y = f'''(x)dx^3$. $f'''(x) = \left(e^{5x}\right)''' = 125e^{5x}$. Звідси випливає, що $d^3 y = 125e^{5x}dx^3$.

Приклад. Знайти $d^2 y$, якщо $y = x^3$ і $x = t^4 + 2t$, t – незалежна змінна.

Розв'язання. Оскільки $y(x)$ є складеною функцією (x – залежна змінна, $x = x(t)$), тому використовувати формулу (6) не можна. Тут $d^2 y = d\left(f'(x)dx\right) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $dx = x'_t dt = \left(4t^3 + 2\right)dt$, $d^2x = x''_{tt}dt^2 = 12t^2dt^2$. Підставивши ці вирази у вираз для другого диференціалу $d^2 y$, отримаємо:

$$d^2 y = 6x \cdot dx^2 + 3x^2 \cdot 12d^2x = 6\left(t^4 + 2t\right)\left(4t^3 + 2\right)^2 dt^2 + 36\left(t^4 + 2t\right)^2 t^2dt^2 =$$
$$= 12\left(t^4 + 2t\right)\left(11t^6 + 14t^3 + 2\right)dt^2.$$

Зауважимо, що аналогічний результат ми б отримали, записавши спочатку y як функцію незалежної змінної t, тобто підставивши у вираз для $y(x)$ функцію $x = t^4 + 2t$ і далі використавши формулу для отриманої функції незалежної змінної t.