Основні теореми диференціального числення.

Теорема **(критерій диференційовності).** Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0) = A$.

Означення. Функцію f називають **диференційовною в інтервалі** $(a;b)$, якщо вона диференційовна в кожній точці цього інтервалу.

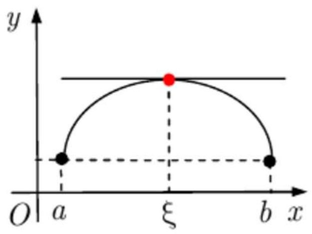
Диференційованим в інтервалі функціям притаманні спільні властивості – теореми про середнє значення.

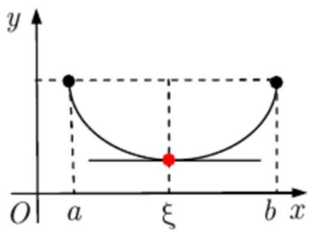
Теорема **(Роля).** Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$;
2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$;
3) на кінцях відрізку $[a;b]$ набуває рівних значень $f(a) = f(b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ, у якій похідна функції дорівнює нулеві, тобто

$$f'(\xi) = 0, \xi \in (a;b).$$



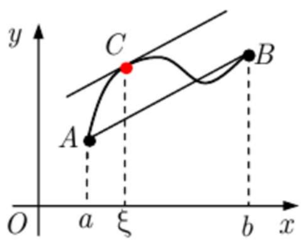


Теорема **(Лаґранжа).** Якщо функція f:

1) неперервна на відрізку $[a;b]$,
2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ така, що

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), a < \xi < b.$$



Формулу

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)}$$

ще називають *Лаґранжовою формулою*.

Якщо в Лаґранжовій формулі покласти $a = x_0, b = x_0 + \Delta x$, то вона набуде вигляду

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x, \xi \in \left(x_0; x_0 + \Delta x\right).$$

Оскільки формула дає точний зв'язок приросту функції і приросту аргументу, її ще називають *формулою скінченних приростів* (вказати точку ξ часто не можливо).

Теорема **(Коші).** Якщо функції f і g:

1) неперервні на відрізку $[a;b]$,
2) диференційовні в інтервалі $(a;b)$,
3) похідна $g'(x) \neq 0$ в інтервалі $(a;b)$,

то в інтервалі $(a;b)$ існує принаймні одна точка ξ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < b.$$

Похідні вищих порядків

Якщо y' є похідна від функції $y = f(x)$, то похідна від y' називається другою похідною, або похідною другого порядку и позначається y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогічно визначаються похідні будь-якого порядку:

похідна третього порядку $\left(y''\right)' = y''' = f'''(x) = \dfrac{d^3y}{dx^3}$;

похідна n-го порядку: $\left(y^{(n-1)}\right)' = y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Означення *Похідною n–го порядку* функції $y = f\left(x\right)$ називають похідну від похідної $\left(n-1\right)$-го порядку цієї функції, тобто $y^{(n)}\left(x\right) = \left(y^{(n-1)}\left(x\right)\right)'$.

Приклад.

$y = x^5 - 7x^3 + 2;$

$y' = 5x^4 - 21x^2,$

$y'' = 20x^3 - 42x,$

$y''' = 60x^2 - 42,$

$y^{(4)} = 120x,$

$y^{(5)} = 120.$

Похідні порядків, вищих, ніж перший, називають *похідними вищих порядків*.

Наведемо формули для похідних n-го порядку деяких елементарних функцій.

1. $\left(x^m\right)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)x^{m-n}$.
2. $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$
3. $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.
4. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.
5. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.
6. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$.

Розглянемо формулу для похідної двох функцій

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Продиференціюємо її:

$$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + 2u'v' + uv''$$

Обчислимо третю похідну

$$(uv)''' = (u''v + 2u'v' + uv'')' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

Очевидно, що похідні більш високих порядків від добутку двох функцій зберігають структуру, що відповідає формулі бінома Ньютона та загальна формула матиме вигляд:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \text{ де } \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}/$$

Ця формула називається формулою Лейбниця.

Для знаходження похідної n-го порядку добутку функцій $u(x)$ та $v(x)$ використовують формулу Лейбніца:

$$(u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}.$$

Приклад. Знайти похідну $y^{(25)}$ функції $y = x^2 \sin x$.

Розв'язання. Застосуємо формулу Лейбніца. Для цього виберемо $u = \sin x$, $v = x^2$. $v' = 2x$, $v'' = 2$. При $k > 2$ $v^{(k)} = 0$. Тому маємо: $(uv)^{(25)} = u^{(25)}v + 25u^{(24)}v' + \frac{25\cdot 24}{2!}u^{(23)}v''$.

Враховуючи, що похідні $(\sin x)^{(23)} = \sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x$

$(\sin x)^{(24)} = (-\cos x)' = \sin x$,

$(\sin x)^{(25)} = (\sin x)' = \cos x$, отримаємо:

$y^{(25)} = \cos x \cdot x^2 + 50 \sin x \cdot x - 600 \cos x$.

Логарифмічне диференціювання

Іноді під час знаходження похідної доцільно задану функцію спочатку логарифмувати, і тільки потім знайти похідну. Така операція називається логарифмічним диференціюванням.

Якщо треба знайти y' з рівняння $y = f(x)$, то можна:

а) логарифмувати обидві частини рівняння

$$\ln y = \ln f(x) = \varphi(x);$$

б) диференціювати обидві частини отриманої рівності, де $\ln y$ є складена функція від x,

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x) \Rightarrow y' = y \cdot \varphi'(x).$$

в) замінити y його виразом через x

$$y' = f(x) \cdot \varphi'(x).$$

Приклад: $y = x^x$

$a) \ln y = \ln x^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = x \ln x;$

$б) \left(\ln y\right)' = \left(x \ln x\right)' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = x' \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + 1 \quad \Rightarrow y' = y(\ln x + 1);$

в) За умовами задачі $y = x^x$, *тому* $y' = x^x \cdot (\ln x + 1).$

Зауваження. Даний підхід також використовують, якщо функція містить кілька співмножників. Тоді, користуючись властивостями логарифмів, можна в простій формі записати результат логарифмування.

Диференціювання неявно заданої функції

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв’язаним відносно y, то функція називається заданою в явному вигляді. Якщо ж функція задана у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв’язаного відносно y, то говорять, що **функція задана неявно**.

Будь-яку явно задану функцію $y = f(x)$ можна записати як неявно задану рівнянням $y - f(x) = 0$, але не навпаки. Іноді неможливо розв’язати рівняння відносно y. Наприклад, $5^{xy} - \sin(xy) + e^{x+y} - 7 = 0$.

Щоб про диференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв'язати відносно y'. Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад: Знайти похідну неявної функції $e^{y-x} = y^2$.

$$e^{y-x} - y^2 = 0$$

$$\left(e^{y-x} - y^2\right)' = (0)'$$

$$e^{y-x} \cdot (y' - 1) - 2y \cdot y' = 0$$

$$e^{y-x} \cdot y' - e^{y-x} - 2y \cdot y' = 0$$

$$e^{y-x} \cdot y' - 2y \cdot y' = e^{y-x}$$

$$y' \cdot \left(e^{y-x} - 2y\right) = e^{y-x}$$

$$y' = \frac{e^{y-x}}{e^{y-x} - 2y}$$

Диференціювання функцій, що задані параметрично

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, де t - допоміжна змінна, яка називається параметром. Похідну знаходять за формулою $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Приклад.

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(3t^5 + 5t^3 + 1\right)'}{\left(t^3 + 3t + 1\right)'} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = \frac{15t^2(t^2 + 1)}{3(t^2 + 1)} = 5t^2$$