Лекція 4

Тема: «Похідна функції»

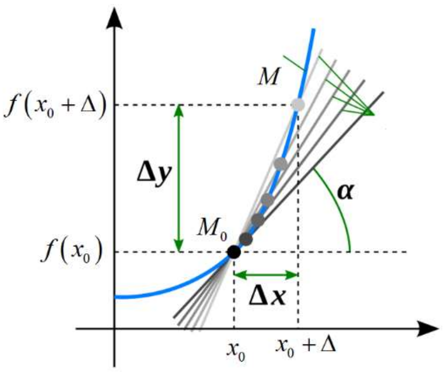
Похідна функції – є одним з найважливіших понять у математиці. Похідна широко використовується в ході розв’язання цілого ряду задач математики, фізики, інших наук, особливо при вивченні швидкості різних процесів.

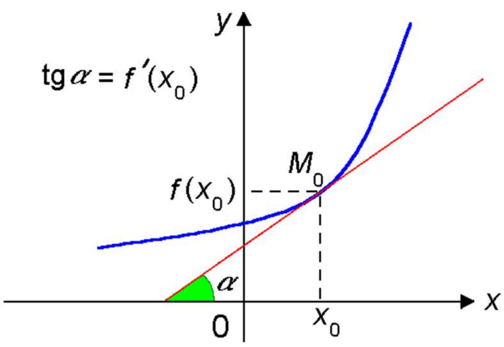
Процес знаходження похідної називається диференціюванням. Обернена операція відновлення функції за відомою похідною – називається інтегруванням.

Похідна функції в деякій точці характеризує швидкість зміни значень функції в точці.

Означення. Нехай в деякому околі точки x_0 визначена функція $y = f(x)$. ***Похідною функції в точці*** x_0 називається границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (границя відношення приросту функції до приросту аргументу Δx, коли приріст Δx прямує до нуля). Похідна існує, якщо існує ця границя.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$





Похідна функції позначається y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$.

Зауваження 1. Якщо в деякій точці x границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, то похідну $f'(x)$ в цій точці називають нескінченною.

Зауваження 2. Якщо в деякій точці x границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не існує, то не існує в цій точці і похідної $f'(x)$.

Зауваження 3. Похідна функції при певному значенні $x=x_0$ - якщо існує – є певне число, що дорівнює швидкості змінення функції в цій точці. Якщо похідна існує на деякому інтервалі $(a;b)$, то похідна є функція від x.

Односторонні (однобічні) похідні

Розглянемо поняття односторонньої похідної. Односторонні похідні визначаються за допомогою односторонніх границь.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена у околі точки x. Границю відношення приросту функції $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ до приросту аргументу Δx, якщо $\Delta x\to 0$ і при цьому $\Delta x>0$, називають ***правою похідною*** від функції $f(x)$ у точці x і позначають $f'_+(x)$:

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена у околі точки x. Границю відношення приросту функції $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ до приросту аргументу Δx, якщо $\Delta x\to 0$ і при цьому $\Delta x<0$, називають ***лівою похідною*** від функції $f(x)$ у точці x і позначають $f'_-(x)$:

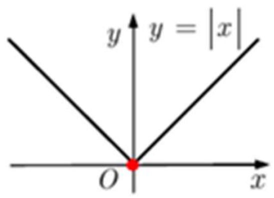
$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$, то під похідною у точці $x=a$ розуміють праву похідну, а у точці $x=b$ – ліву.

З означення похідної випливає, що похідна $f'(x)$ у точці $x=x_0$ існує тоді і тільки тоді, коли у цій точці існують ліва та права похідні і вони рівні між собою: $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$. Якщо ж $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$, то похідна у цій точці не існує. Не існує похідної і у точках розриву функції $f(x)$.

Приклад. Довести, що функція $y=|x|$ не має похідної у точці $x=0$.

Розв'язання. Приріст функції $y=|x|$ у точці $x=0$, що відповідає приросту аргументу Δx, $\Delta y=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|$. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.



Це відношення дорівнює -1 при $\Delta x<0$ і дорівнює 1 при $\Delta x>0$. Тому границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ залежить від знаку Δx: вона дорівнює 1 при $\Delta x>0$ і -1 при $\Delta x<0$. Таким чином, у точці $x=0$ існують односторонні похідні $f'_-(0)=-1$ та $f'_+(0)=1$, але $f'_-(0)\neq f'_+(0)$.

Це означає, що у точці $x=0$ похідна функції $y=|x|$ не існує.

Користуючись поняттям однобічних границь функції, дістаємо:

Теорема (критерій існування скінченної похідної).
У точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0)$ тоді і лише тоді, коли існують скінченні права та ліва похідні і ці похідні рівні між собою $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$

Знаходження похідної функції в точці

Дію відшукання похідної функції називають ***диференціюванням***. Щоб знайти похідну від заданої функції $f(x)$, за означенням, треба:

1) Надаючи фіксованому аргументові $x\in D(f)$ приріст Δx, обчислити значення функції $f(x+\Delta x)$;
2) Знайти відповідний приріст функції $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$;

3) Утворити відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

4) Знайти границю цього відношення, коли $\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

Приклад. Користаючись означенням похідної, знайти похідну функції $y=x^2$

Розв'язання. Надамо аргументу x приросту Δx і обчислимо приріст Δy :

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Висновок. Для $y=x^2$ похідна $f'(x)=2x$.

Теорема **(критерій диференційовності).** Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0)=A$.

Теорема **(необхідна умова диференційовності).** Якщо функція диференціиовна в деякій точці, то вона й неперервна в цій точці.

Зворотне твердження неправдиве: з неперервності функції f у деякій точці не випливає диференційовність її в цій точці.

Приміром, функція $y=|x|$ непрерервна в точці $x_0=0$, але не має похідної в цій точці, а, отже, не є диференційовною.

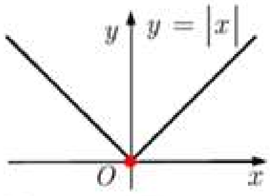
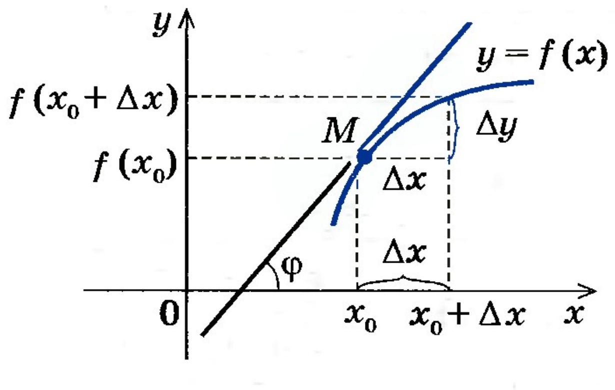


Рис. Приклад неперервної недиференційовної функції в точці $x_0=0$

Геометричний зміст похідної.



За означенням похідна - це

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Геометрично похідна представляє собою кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x, тобто $y'(x_0) = tg\varphi$.

Похідна є швидкість змінення функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Похідні за часом є одним з ключових понять у фізиці. Наприклад, для радіус-вектора, похідна за часом - це його швидкість, а друга похідна за часом - це його прискорення. Третя похідна за часом відома як ривок.

Велике число рівнянь у фізиці є похідним за часом від вектору.

Багато інших фундаментальних величин в науці співвідносяться як похідні за часом один від одного:

- сила є похідною за часом від імпульсу
- потужність є похідною за часом від енергії
- електричний струм є похідним за часом від електричного заряду

Таблиця похідних основних елементарних функцій:
(треба вивчити напам'ять!)

1) $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$	7) $(\cos x)' = -\sin x$	13) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
2) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	8) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	14) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
3) $(e^x)' = e^x$	9) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	15) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\cdot \ln a}$	10) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	16) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	11) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	17) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
6) $(\sin x)' = \cos x$	12) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	

1. Основні правила диференціювання

Нехай $C - const$, $u = u(x)$, $v = v(x)$, тоді:

1. $C' = 0$ (Похідна сталої дорівнює нулю).
2. $(Cu)' = C(u)'$ (Сталий множник можна виносити за знак похідної.
3. Якщо існують похідні $u'(x)$ и $v'(x)$, то похідна від суми (різниці) функцій $u(x)$ и $v(x)$ дорівнює $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$
5. $(u\cdot v\cdot w\cdot \ldots \cdot z)' = u'\cdot v\cdot w\ldots z + u\cdot v'\cdot w\ldots z + u\cdot v\cdot w'\ldots z + \ldots + u\cdot v\cdot w\ldots z'$
6. Якщо існують похідні $u'(x)$ и $v'(x)$ і $v \neq 0$, то похідна від частки цих функцій $u(x)$ и $v(x)$ дорівнює

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

Приклади:

$$1)\ \left(x^2+\sin x\right)'=(x^2)'+\left(\sin x\right)'=2x+\cos x;$$

$$2)\ (3\ln x)'=3\cdot(\ln x)'=3\cdot\frac{1}{x};$$

$$3)\ \left(x\cdot e^x\right)'=x'\cdot e^x+x(e^x)'=e^x+x\cdot e^x;$$

$$4)\ \left(\frac{x^2}{tgx}\right)=\frac{(x^2)'\cdot tgx-x^2(tgx)'}{\left(tgx\right)^2}=\frac{2xtgx-x^2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{tg^2x};$$

7. Теорема (про похідну складеної функції). Якщо складена функція $y=f\left(u\right)$, де $u=\varphi\left(x\right)$, і функція $u=\varphi\left(x\right)$ має похідну u'_x в точці x, і функція $y=f\left(u\right)$ має похідну f'_u у відповідній точці u, то складена функція має похідну за формулою $\left(f\left(u\right)\right)'_x=f'_u\cdot u'_x$.

Практичне правило. Для знаходження похідної складеної функції необхідно похідну даної функції за проміжним аргументом f'_u помножити на похідну внутрішньої функції u'_x.

$$5)\ \left(\sqrt{e^{2x}+\cos^2 x}\right)'=\left[\left(e^{2x}+\cos^2 x\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{2x}+\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{2x}+\cos^2 x\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{2x}+\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{2x}\left(2x\right)'+2\cos x(-\sin x)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+\cos^2 x}}\cdot(e^{2x}\cdot 2x-2\cos x\sin x).$$

Формули диференціювання основних функцій:

1) $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	8) $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	14) $(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$
2) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	9) $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	15) $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$
3) $(e^u)' = e^u \cdot u'$	10) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	16) $(\mathrm{th}\, u)' = \frac{u'}{\mathrm{ch}^2 u}$
4) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	11) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	17) $(\mathrm{cth}\, u)' = \frac{-u'}{\mathrm{sh}^2 u}$
5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	12) $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	
6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	13) $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$	
7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$		