Лекція 3

Тема: «Границя функції» (продовження)

Нескінченна велика функція

Означення. **Функція** $y = f(x)$ **називається** ***нескінченно великою*** при $x \to x_0$, якщо для довільного, будь-якого великого додатного числа M, , можна знайти таке $\delta > 0$, що для всіх значень x, що відрізняються від x_0 і задовольняють умові $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.

Записують $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ або $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Наприклад, функція $y = \dfrac{1}{x-5}$ - є нескінченно велика функція при $x \to 5$

Якщо $f(x)$ прямує до нескінченності при $x \to x_0$ и при цьому приймає тільки додатні або тільки від'ємні значення, відповідно пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Властивості нескінченно великих величин:

1. Добуток нескінченно великої величини на функцію, границя якої відрізняється від нуля, є величина нескінченно велика.
2. Сума нескінченно великої величини і обмеженої функції є величина нескінченно велика.
3. Частка від ділення нескінченно великої величини на функцію, що має скінченну границю, є величина нескінченно велика.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно малою при*** $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Аналогічно визначається нескінченно мала функція при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Нескінченно малі функції часто називають нескінченно малими величинами або нескінченно малими; позначають **грецькими буквами** α, β *і* т.д.

Наприклад,

1) функція $\alpha = \sin x$ є нескінченно малою при $x \to 0$;

2) функція $\alpha = \frac{1}{x}$ є нескінченно малою при $x \to \infty$;

3) функція $\alpha = x - 1$ є нескінченно мала при $x \to 1$.

Властивості нескінченно малих величин:

1. Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.

2. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу функцію є функція нескінченно мала.

3. Добуток двох нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала.

4. Добуток нескінченно малої функції на число є функція нескінченно мала.

5. Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, що має відмінну від нуля границю, є функція нескінченно мала.

Зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими величинами.

Теорема. Якщо функція $\alpha(x)$ – нескінченно мала ($\alpha(x) \neq 0$), то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно велика функція. И навпаки: якщо функція $\alpha(x)$– нескінченно велика, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ - нескінченно мала функція.

Наприклад,

1) функція $y = \cos x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ є величина нескінченно мала, а функція $y = \frac{1}{\cos x}$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ є величина нескінченно велика;

2) функція $y = \sqrt{5x - 7}$ при $x \to \infty$ є величина нескінченно велика, а функція $y = \frac{1}{\sqrt{5x - 7}}$ при $x \to \infty$ є величина нескінченно мала.

Еквівалентні нескінченно малі функції

Порівняння нескінченно малих функцій.

Як відомо, сума, різниця і добуток двох нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала. Відношення ж двох нескінченно малих функцій може поводитися різним чином: бути кінцевим числом, бути нескінченно великою функцією, нескінченно малою або взагалі не прямувати ні до якого числа.

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою їх відношення.

Нехай $\alpha=\alpha(x)$ и $\beta=\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x\to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \text{ и } \lim_{x\to x_0}\beta(x)=0.$$

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$, то α и β називаються *нескінченно малими одного порядку.*
2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}$ то α називаються *нескінченно малою вищого порядку,* ніж β.
3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}$ то α і β називаються еквівалентними *нескінченно малими. Позначають* $\alpha\sim\beta$
4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$, то α називаються *нескінченно малою нижчого порядку*, ніж β.

Відмітимо, що ці правила порівняння нескінченно малих застосовуються при $x\to\pm\infty$, $x\to x_0\pm 0$.

Еквівалентні нескінченно малі і основні теореми про них.

Серед нескінченно малих функцій одного порядку важливу роль грають <u>***еквівалентні нескінченно малі***</u> ($\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=1$). Позначаються як $\alpha\sim\beta$

Наприклад, $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, так як $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Теорема 1. Границя відношення двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо кожну або одну з них замінити на еквівалентну їй нескінченну малу.

Теорема 2. Різниця двох нескінченно малих функцій є нескінченна мала вищого порядку, ніж кожна з них.

Теорема 3. Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку самого низького порядку.

Доданок, що є еквівалентним сумі нескінченно малих, називається *головною частиною цієї суми*.

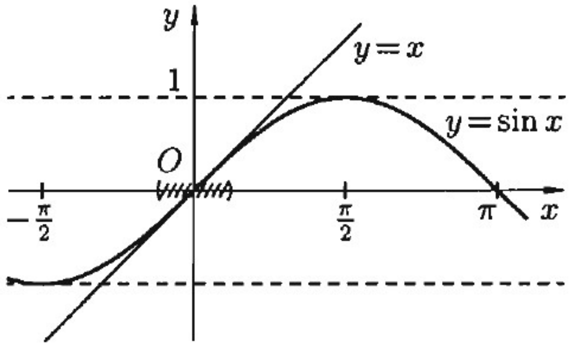
Заміна суми нескінченно малих функцій її головною частиною називається *відкиданням нескінченно малих вищого порядку*.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+7x^2}{\sin 2x}$.

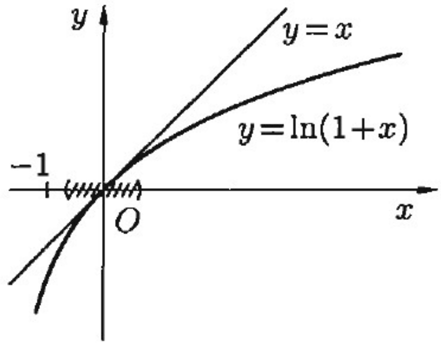
Розв'язок.. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+7x^2}{\sin 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{c}x\to 0\\ 3x+7x^2\sim 3x\\ \sin 2x\sim 2x\end{array}\right|\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$

Таблиця еквівалентних нескінченних малих

1. $\sin x\sim x$ при $x\to 0$	6. $e^x-1\sim x$ при $x\to 0$
2. $tgx\sim x$ при $x\to 0$	7. $a^x-1\sim x\cdot\ln a$ при $x\to 0$
3. $arc\sin x\sim x$ при $x\to 0$	8. $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$
4. $arctgx\sim x$ при $x\to 0$	9. $\log_a(1+x)\sim x\cdot\log_a e$ при $x\to 0$
5. $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$ при $x\to 0$	10. $(1+x)^k-1\sim k\cdot x,\quad k>0$ при $x\to 0$; зокрема $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$



. $\sin x \approx x \ (x \to 0)$



$\ln(1+x) \approx x \ (x \to 0)$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 3x}$.

Розв'язок.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{c} x\to 0 \\ tg2x \sim 2x \\ \sin 3x \sim 3x \end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(x-1)}{x^2-5x+4}$.

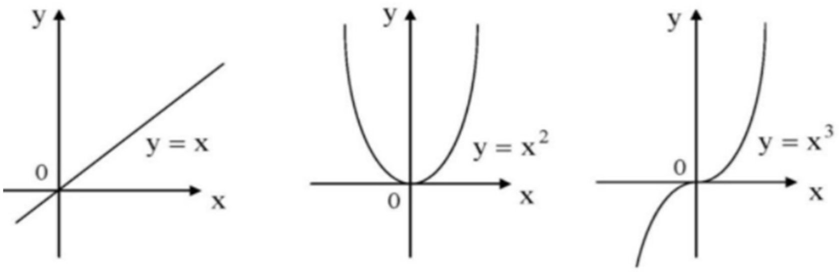
Розв'язок.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(x-1)}{x^2-5x+4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{c} x-1\to 0 \\ \arcsin(x-1)\sim(x-1) \end{array}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-4}=-\frac{1}{3}.$$

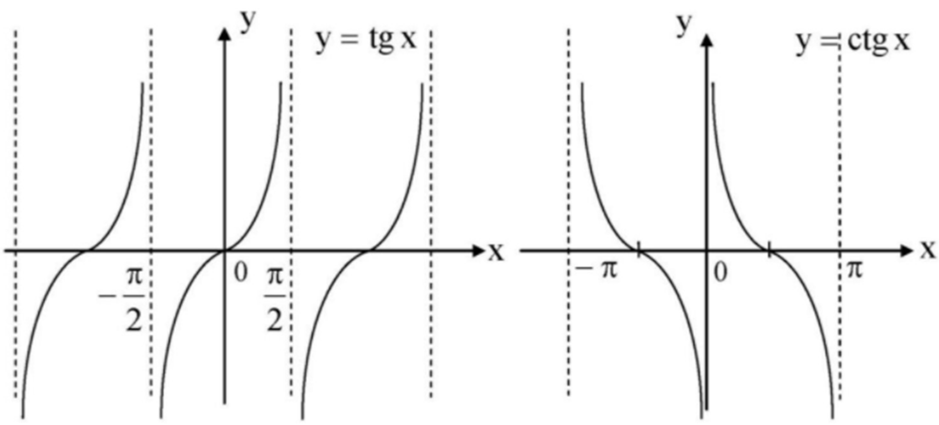
!!!!! Еквівалентні нескінченно великі

Неперервність функції. Точки розриву та їх класифікація.

Приклади неперервних функцій:



Приклади функцій, що мають розриви:



Означення 1. Функція $f(x)$ називається ***<u>неперервною в точці</u>*** $x = x_0$, якщо границя функції в точці x_0 існує і дорівнює значенню функції в цій точці:

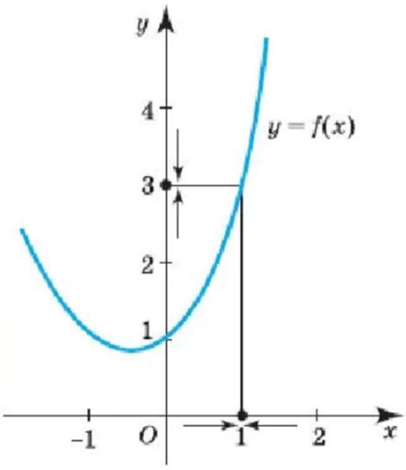
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

За цим означенням неперервність функції $f(x)$ в точці x_0 означає здійснимість таких умов:

1) функція $f(x)$ повинна бути визначена в точці x_0;

2) для функції $f(x)$ повинна існувати границя в точці x_0;

3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 збігається із значенням функції в цій точці.



Врахуємо, що: якщо в точці x_0 існує границя функції $y = f(x)$, то існують границі функції в точці x_0 зліва и справа і вони рівні:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Тоді рівність (1) можна записати так:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Таким чином, можна дати наступне означення неперервності функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Означення 2. Функція $y = f(x)$ називається ***<u>неперервною в точці</u>*** x_0, якщо вона має односторонні границі в цій точці, рівні між собою і рівні, в той же час, значенню функції в самій точці x_0.

Означення 3. Якщо функція неперервна в кожній точці деякої області, то вона називається неперервною в цій області.

Точки розриву функції та їх класифікація

Означення 4. Точка x_0 називається ***точкою розриву***, якщо в цій точці порушується умови неперервності функції.

Усі точки розриву функції поділяються на точки розриву першого и другого роду.

Означення 5. Точка розриву x_0 називається ***точкою розриву першого роду*** функції $y = f(x)$, якщо в цій точці існують скінченні границі функції зліва і справа, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 \qquad \text{і} \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2 .$$

При цьому:

а) якщо $A_1 = A_2 \neq f\left(x_0\right)$, то точка x_0 називається ***точкою усувного розриву;***

б) якщо $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 називається ***точкою розриву типу «стрибок».***

Значення $\left|A_1 - A_2\right|$ називають ***стрибком функції*** в точці розриву першого роду.

Означення 6. Точка розриву x_0 називається ***точкою розриву другого роду*** функції $y = f(x)$, якщо, хоча б одна з односторонніх границь (зліва або справа) не існує або дорівнює нескінченності.

Розглянемо функції, що мають різні типи розриву.

Для функції (рис.1)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{де} \quad x \neq 0 \\ 2, & \text{де} \quad x = 0 \end{cases}$$

точка $x_0 = 0$ є точкою усувного розриву першого роду, тому що

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{і}$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Зауважимо, що положив $f(x) = 1$ (замість $f(x) = 2$) при $x_0 = 0$, розрив счезне, функція стане неперервною.

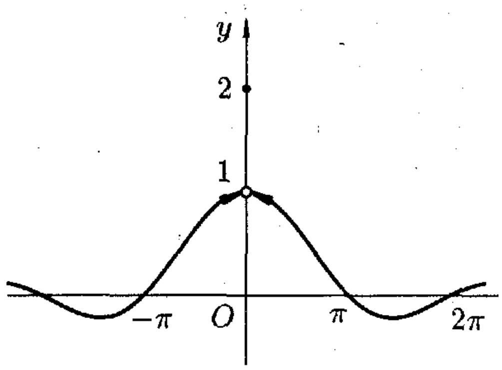


Рис.1

Для функції (рис.2)

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \partial e \quad -1\le x<2 \\ 2-x, & \partial e \quad 2\le x\le 5 \end{cases}$$

точка $x_0=2$ є точкою розриву першого роду, тому що $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} x-1=1$ і $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} 2-x=0$.

Стрибок функції дорівнює $|1-0|=1$

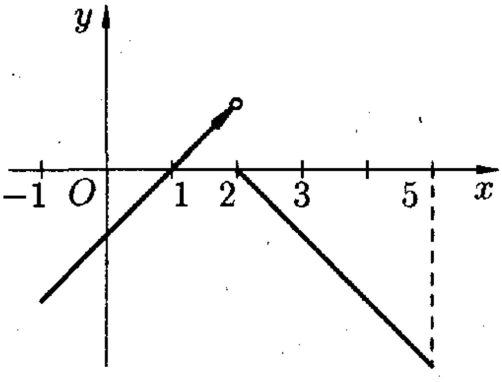


Рис.2

Для функції $y=\dfrac{1}{x-2}$ (рис.3), точка $x_0=2$ є точкою розриву другого роду, тому що $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=-\infty$ і $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=+\infty$.

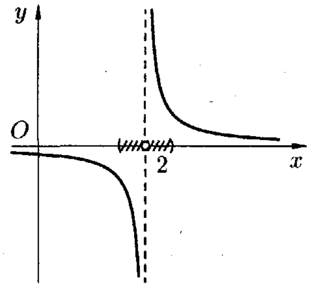


Рис.3

Властивості неперервних функцій.

Теорема 1. Сума скінченного числа функцій, неперервних у точці a, є функція, неперервна в цій точці.

Теорема 2. Добуток скінченного числа функцій, неперервних у точці a, є функція, неперервна в цій точці.

Теорема 3. Відношення двох функцій, неперервних у точці a, є функція, неперервна в цій точці, якщо значення функції у знаменнику відмінне від нуля в точці a.

Теорема 4. Многочлен є функція, неперервна на всій числовій прямій.

Теорема 5. Будь-яка дробово-раціональна функція неперервна в кожній точці своєї області визначення.

Наприклад, функція $f(x)=\dfrac{3-x}{4x+7}$ неперервна на всій числовій прямій, крім точки $x=-\dfrac{7}{4}$, в якій знаменник дробу обертається в нуль.

Функція $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1}$

неперервна всюди на $\mathbb{R}$, бо знаменник ніде не обертається в нуль.

Функції, неперервні на відрізку, мають ряд важливих властивостей.

Теорема 6. Якщо функція $f\left(x\right)$ неперервна на відрізку $\left[a;b\right]$ і на кінцях його набуває значень різних знаків, то всередині відрізка $\left[a;b\right]$ знайдеться хоча б одна точка, в якій ця функція обертається в нуль.

Теорема 7. Якщо функція неперервна на відрізку, то серед значень, які вона набуває на цьому відрізку, існують найменше і найбільше значення. При цьому вона набуває всі значення між найбільшим і найменшим значенням.