Дисципліна «**Вища математика**»

Лекція 2

Тема: «Границя функції»

Означення границі функції

При дослідженні поведінки функції в деякій точці зручно користуватися поняттям околу. *Околом точки* називають будь-який інтервал, що містить цю точку.

Наприклад: інтервали (2; 5), (2,5; 3,5), (2,9; 3,1) – околи точки 3.

Означення границі функції в точці (за Коші «мовою $\varepsilon-\delta$ околів»)

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, окрім, може бути, самої точки x_0.

Число A називається ***границею функції*** $y=f(x)$ в точці x_0 (або при $x\to x_0$), якщо для довільного як завгодно малого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що для усіх $x\neq x_0$, які задовольняють нерівності $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Записують: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Геометричний зміст границі функції:

співвідношення $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ означає, що для всіх точок x з δ- околу точки x_0, точки графіка функції $y=f(x)$ лежать усередині полоси шириною 2ε, яка обмежена прямими $y=A-\varepsilon$ і $y=A+\varepsilon$. Очевидно, що величина δ залежить від вибору ε, тому пишуть $\delta=\delta(\varepsilon)$.

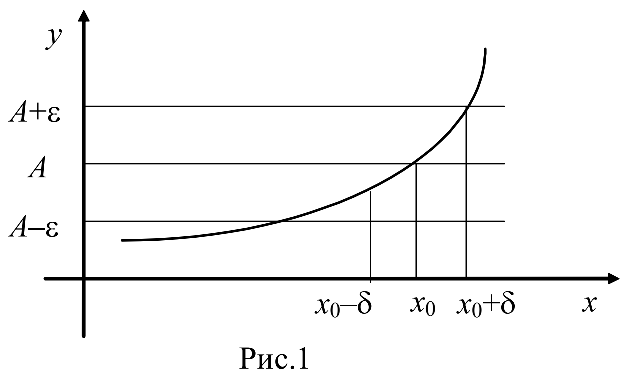


Рис.1

Зауваження. Для існування границі функції при $x \to x_0$ не вимагається, щоб функція була визначена в точці $x = x_0$. При знаходженні границі розглядаються значення функції в околі точки x_0, що відрізняються від x_0.

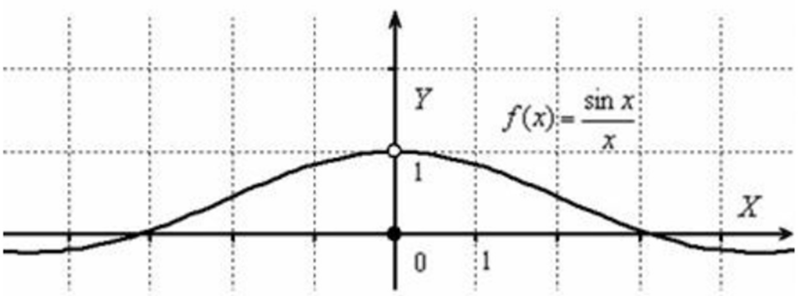


Рис.2

Односторонні границі

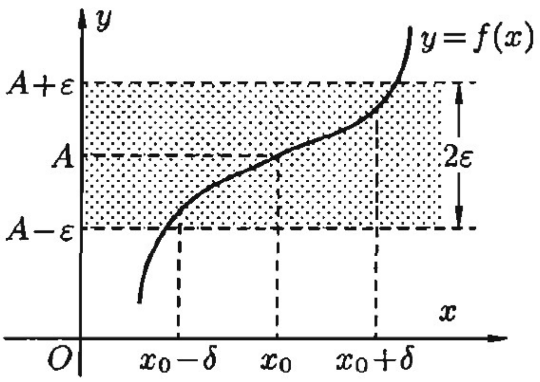


Рис.3

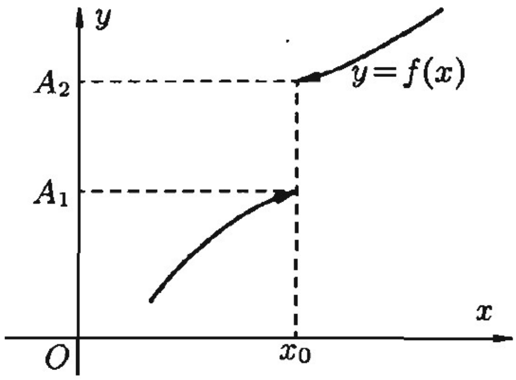
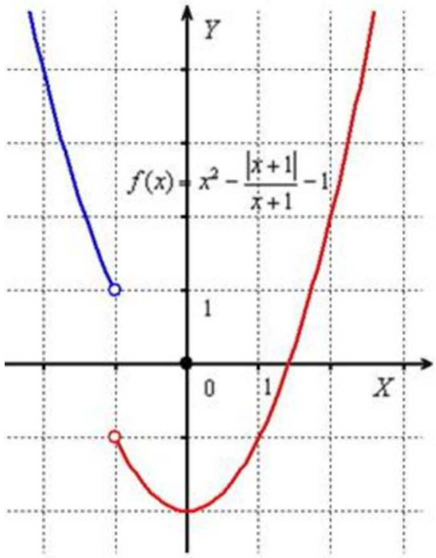


Рис.4



У наведених вище означеннях границі $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ вважалось, що x прямує до x_0 довільним способом: залишаючись меншим від x_0 (зліва від x_0), більшим від x_0 (справа від x_0) чи коливаючись навколо x_0, набуваючи значень то менших, то більших від x_0. Існують випадки, коли спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. Тому вводять поняття односторонніх границь.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0.

Означення. Якщо шукають границю функції $f(x)$ за умови, що x, прямуючи до x_0, може приймати тільки такі значення, які менші за x_0, то цю границю, якщо вона існує, називають границею функції $f(x)$ зліва в точці x_0 і позначають

$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ або $f(x_0 - 0)$ (позначення Діріхле).

Число A_1 називається ***границею функції*** $f(x)$ ***зліва*** (або лівою границею) в точці x_0, якщо $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$.

Означення. Якщо шукають границю функції $f(x)$ за умови, що x, прямуючи до x_0, може приймати тільки такі значення, які більші за x_0, то цю границю, якщо вона існує, називають границею функції $f(x)$ справа в точці x_0 і позначають

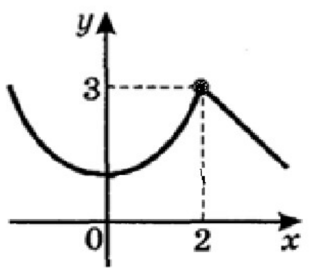
$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ або $f(x_0 + 0)$ (позначення Діріхле).

Число A_2 називається ***границею функції*** $f(x)$ ***справа*** *(або правою границею)* в точці x_0, якщо

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

Границі функції зліва и справа називають **односторонніми границями**.

Зауваження 1. Якщо пишуть, що в точці x_0 існує границя функції $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, то це позначає, що існують границі функції в точці x_0 зліва і справа і вони рівні числу A. І обернено, якщо границя зліва і границя справа функції в точці x_0 існують і дорівнюють числу A, то число A є границею функції в даній точці.

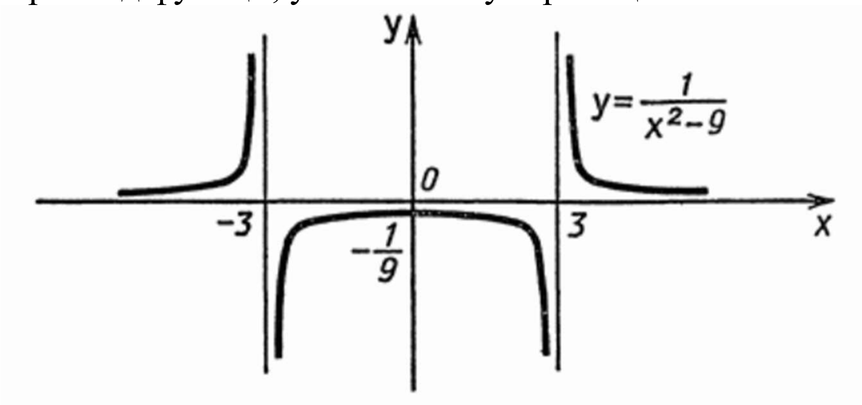


$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

Зауваження 2. У функції в точці може існувати границя, а може і не існувати.

Приклад функції, у якої не існує границь в точках $x=-3$ та $x=3$

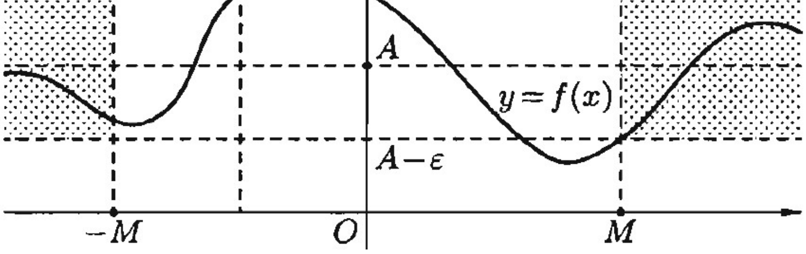


Границя функції при $x\to\infty$

Означення. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty;+\infty)$. Число A називають ***границею функції*** $f(x)$ ***при*** $x\to\infty$**,** якщо для довільного додатного числа ε існує таке додатне число M, що для всіх значень x, що задовольняють нерівності $|x|>M$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$, що символічно записується наступним чином: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

В тому випадку коли $x\to-\infty$, пишуть $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

Геометричний зміст цього означення: для $\forall\varepsilon>0\ \exists M>0$ таке, що при $x\in(-\infty;-M)$ або $x\in(M;+\infty)$ відповідні значення функції $f(x)$ попадають в ε-окіл точки A, тобто точки графіка лежать у полосі шириною 2ε, яка обмежена прямими $y=A-\varepsilon$ і $y=A+\varepsilon$.



Основні теореми о границях

Нехай існують скінченні границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to x_0$, де x_0 – число або $\pm\infty$.

Теорема 1. *Сталу можна виносити за знак границі*:

$$\lim_{x\to x_0}(Cf(x)) = C\lim_{x\to x_0}(f(x)).$$

Теорема 2. *Границя суми* (*різниці*) *двох функцій дорівнює сумі* (*різниці*) *границі цих функцій*:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 3. *Границя добутку функцій дорівнює добутку границь цих функцій*:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Теорема 4. *Границя відношення функцій дорівнює відношенню границі цих функцій*:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\ \text{при}\ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

Теорема 5. *Границя степеня дорівнює степеню границі*:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^m = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^m,\ \textit{где}\ m\in N.$$

Практичні правила обчислення границь функцій.

При обчисленні границь спочатку необхідно аргумент функції замінити його граничним значенням.

1) Якщо функція є елементарною і якщо граничне значення x_0 входить в область визначення функції, то границя функції дорівнює значенню функції при $x = x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),\ \text{якщо}\ x_0 \in D(f)$$

Приклад 1. Обчисліть $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x+9}{x-5}$. *Розв'язок.* $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x+9}{x-5}=\dfrac{3\cdot 7+9}{7-5}=15$.

Приклад 2. Обчисліть $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-10}{x+3}$. *Розв'язок.* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-10}{x+3}=\dfrac{2\cdot 4-10}{4+3}=\dfrac{-2}{7}$

2) В інших випадках можемо отримати або визначенні значення або невизначеності різних типів.
Якщо $c = const$, маємо такі **співвідношення-визначеності:**

1) $\dfrac{c}{0}=\infty,\ c\neq 0$; 2) $\dfrac{\infty}{0}=\infty$; 3) $\dfrac{c}{\infty}=0$;

4) $\dfrac{0}{\infty}=0$; 5) $c\cdot\infty=\infty,\ c\neq 0$; 6) $\infty\cdot\infty=\infty$;

7) $\infty+\infty=\infty$; 8) $0^{\infty}=0$; 9) $\infty^{\infty}=\infty$.

Підстановка граничного значення часто призводить до **невизначеностей вигляду**:

$$\left\{\frac{0}{0}\right\},\ \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},\ \{0\cdot\infty\},\ \{\infty-\infty\},\ \left\{1^{\infty}\right\},\ \left\{\infty^{0}\right\},\ \left\{0^{0}\right\}.$$

Для розкриття невизначеностей спочатку виконують перетворення, а потім переходять до границі.

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+7)$.

Розв'язок. $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+7)=\lim\limits_{x\to 1}3x^2-\lim\limits_{x\to 1}2x+\lim\limits_{x\to 1}7=$

$$=3\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2-2\lim_{x\to 1}x+7=3\cdot 1^2-2\cdot 1+7=8.$$

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+5}{x-5}$.

Розв'язок.. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+5}{x-5}=\dfrac{3\cdot 5+5}{5-5}=\dfrac{20}{0}=\infty$.

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Розв'язок. Тут застосувати теорему про границю дробу не можна, оскільки границя знаменника при $x\to 2$, дорівнює 0. Окрім того, границя чисельника дорівнює 0. В таких випадках кажуть, що є невизначеність вигляду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+16)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

Розв'язок. Тут є невизначеність вигляду $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Для знаходження даної границі поділимо чисельник і знаменник на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Мають велике значення наступні так звані **перша і друга важливі границі**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$ – ***перша важлива границя***;

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=2,71828\ldots$$ – ***друга важлива границя***.

Наслідки з першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.$$

Наслідки з другої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Приклад 5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$.

Розв'язок. Маємо невизначеність вигляду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Теорему о границі дробу застосувати неможливо.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{2\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}.$$

Приклад 6. Знайти границю $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$.

Розв'язок.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{\frac{2x}{2}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}.$$