Введення в математичний аналіз.

Наведемо скорочення та символи, що часто використовуються:

$\in$ - належить;
$\notin$ - не належить;
$\forall$ –для будь-якого довільного; ($\forall x$ - для будь якого x)
$\exists$ – існує; ($\exists x$ - існує такий x)
$\Rightarrow$ – слідує;
$\Leftrightarrow$ – рівносильне, або - тоді і тільки тоді;
$\{x_n\}$ - числова послідовність;
$k=\overline{1,n}$ - індекс k приймає всі цілі значення від 1 до n;
$n!$ - факторіал числа n; $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$;
$\sum$ - знак суми; $\sum\limits_{i=1}^{n} n^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots.$
$\prod$ - знак добутку; $\prod\limits_{i=1}^{n} n^2 = 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot\ldots.$
π - константа, «число Пи»; $\pi \approx 3{,}1416...$
e - константа Непера; $e\approx 2{,}718$

У математиці є ряд первісних понять, які не визначаються, а служать для визначення інших. До таких понять, зокрема, належать величина, точка, множина.

Стосовно множини можна застосувати термін «сукупність» (сукупність коренів рівняння, сукупність векторів, сукупність чисел і т. п.).

Множини позначаються великими латинськими літерами **A, B, C, …, X, Y, Z,** а елементи з яких складається множина – малими літерами a, b, c,…, x, y, z.

Якщо *A* – множина, *a* – її елемент, то можна записати: $A = \{a|$ опис властивостей елемента$\}$. Наприклад, $A=\{a|\ a<15\}$.

Твердження про те, що елемент *a* належить множині *A*, записують у вигляді $a\in A$. Коли навпаки - елемент *a* не належить множині *A*, то виконують такий запис: $a\notin A$.

Якщо множина A, утворена з чотирьох елементів a,b,c,d записують $A=\{a,b,c,d\}$.

Числовими множинами є:

$\mathbb{N}$ - множина всіх натуральних чисел; $\mathbb{N}=\{1;2;3;...;n;...\}$

$\mathbb{Z}$ - множина всіх цілих чисел; $\mathbb{Z}=\{0;\pm1;\pm2;\pm3;...;\pm n;...\}$

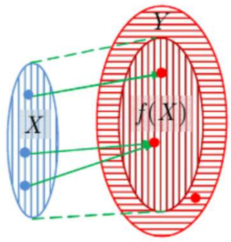
$\mathbb{Q}$ - множина всіх раціональних чисел; $\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{m}{n}: m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

$\mathbb{R}$ - множина всіх дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ - множина всіх комплексних чисел.

Означення. Якщо задано множини X, Y і кожному значенню x, $x\in X$ ставиться у відповідність за деяким законом значення y, $y\in Y$, то кажуть, що на множині X **задана функція** $y=f(x)$.

Множина X - область визначення функції (позначається, як $D(f)$ або $D(y)$), множина допустимих значень аргументу x.

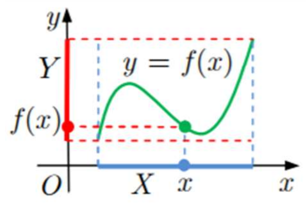
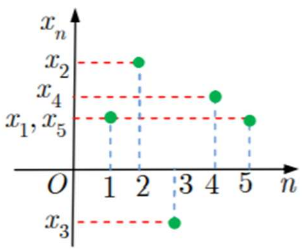
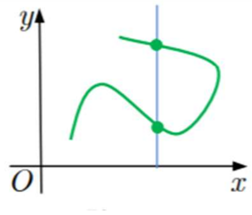
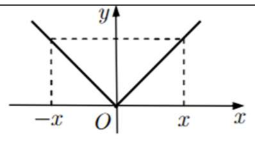
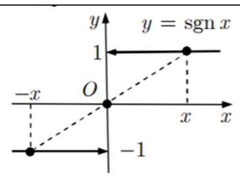


Множина Y - область значень функції.

Зауваження. Означення дано для однозначної функції, хоча можуть бути і многозначні функції. Будемо в подальшому розглядати однозначні функції.

Графіком функції $y=f(x)$ називається множина всіх точок площини Oxy, для кожної з яких $x\in X$, а $y=f(x)$ (є відповідним значенням функції).

Зазвичай графіком функції є деяка лінія; але приміром, якщо $X=\mathbb{N}$, то графіком функції є набір ізольованих точок.

 Графік функції $y=f(x)$, $X=\mathbb{R}$	 Графік функції $y=f(x)$, $X=\mathbb{N}$	 Крива, що не є графіком функції
 Графік функції $y=\lvert x\rvert$	 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$ Графік функції $y=signx$	

Способи задання функції

Існують такі способи задання функції: аналітичний (за допомогою формул), графічний (за допомогою графіка), табличний, описовий. В подальшому будемо застосовувати аналітичний спосіб задання функції.

Аналітичний спосіб, коли функцію задають за допомогою однієї або декількох формул.

Аналітичним способом можна задати функцію явним, неявним або параметричним видом.

а) функцію можна задати **явно** (y виражається через формулу, або декілька формул з x). Приклади. $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 2$;

$$y = \sin 3x + \cos 4x;$$

$$y = \begin{cases} 3x + 2, & x < -5 \\ x^2 - 1, & -5 \le x < 5 \\ 2x - 5, & x > 5 \end{cases}$$

б) функцію можна задати **неявно** у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$

Приклад. $\sin 3x + \cos 4y - e^{xy} = 0$

В) функцію можна задати параметрично рівностями, що залежать від параметра.

Приклад.

Функція $y(x)$ задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = cost \\ y = \sin t, \ t \in [0; 2\pi] \end{cases}.$$

Якщо піднести до квадрата обидві частини обох рівнянь та додати їх, отримаємо

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$$

$x^2 + y^2 = 1$ - рівняння кола з центром в точці $(0,0)$ радіуса $R = 1$ (саме через це тригонометричні функції іноді називають круговими).

Класифікація функцій

1. Многочлен або поліном (ціла раціональна функція).

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

(використані операції +, -, ×, піднесення до цілого додатного степеня).

2. Дробово-раціональна функція (раціональний дріб)

$\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, де $Q_m(x)$, $P_n(x)$ - многочлени степенів m і n відповідно.

3. Ірраціональні функції.

(використовуються операції +, -, ×, піднесення до раціонального степеня).

Типи функцій 1-3 називаються ***алгебраїчними***.

4. Трансцендентні функції – це ті функції, що **не є *алгебраїчними.***

До **основних елементарних функцій** відносять функції: $y = const$, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні і обернені тригонометричні.

Елементарною функцією називається функція, яка подається у вигляді $y = f(x)$, де $f(x)$ - є єдиним аналітичним виразом, який складено з основних елементарних функцій за допомогою скінченої кількості арифметичних операцій та суперпозицій.

Тригонометричні функції

К тригонометричним функціям традиційно відносять:

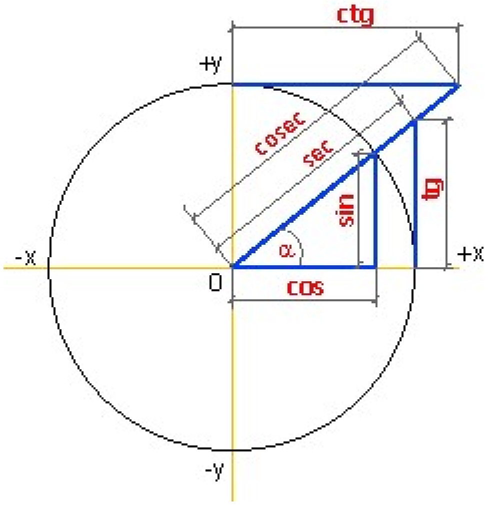
***прямі тригонометричні функції*:**

- синус - $\sin x$
- косинус - $\cos x$

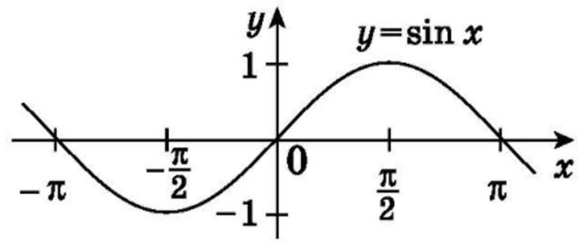
***похідні тригонометричних функцій*:**

- тангенс $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (в іноземній літературі позначення $\tan x$)
- котангенс $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (в іноземній літературі позначення $\cot x$)
- секанс $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$;

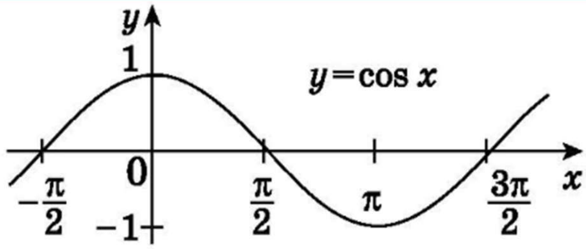
- косеканс $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ (в іноземній літературі позначення $\csc x$)



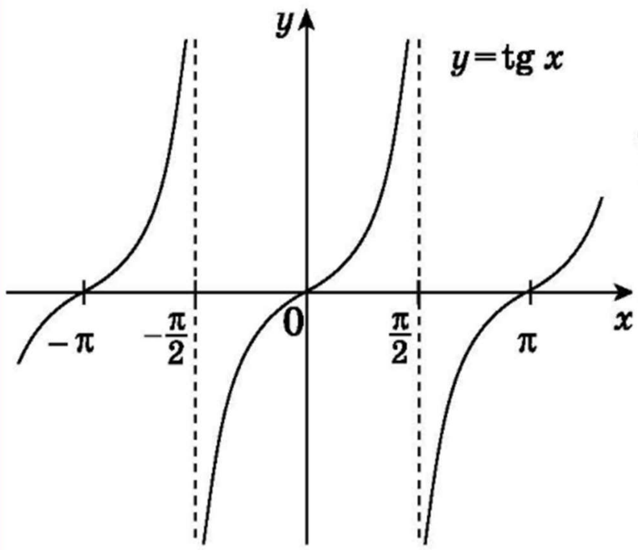
Функція $y = \sin x$



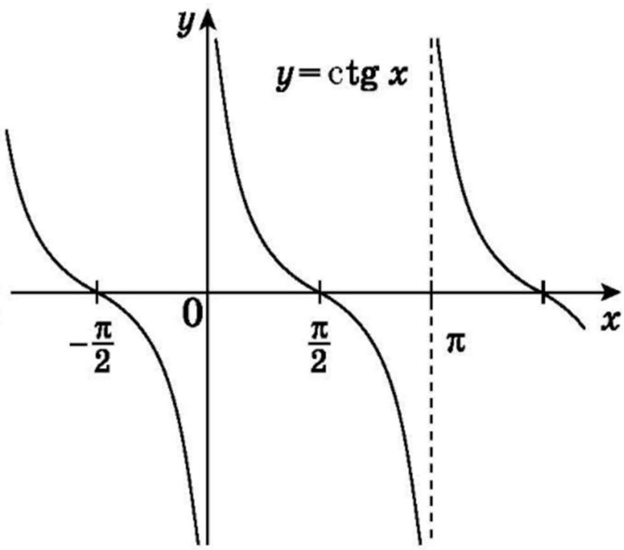
Функція $y = \cos x$

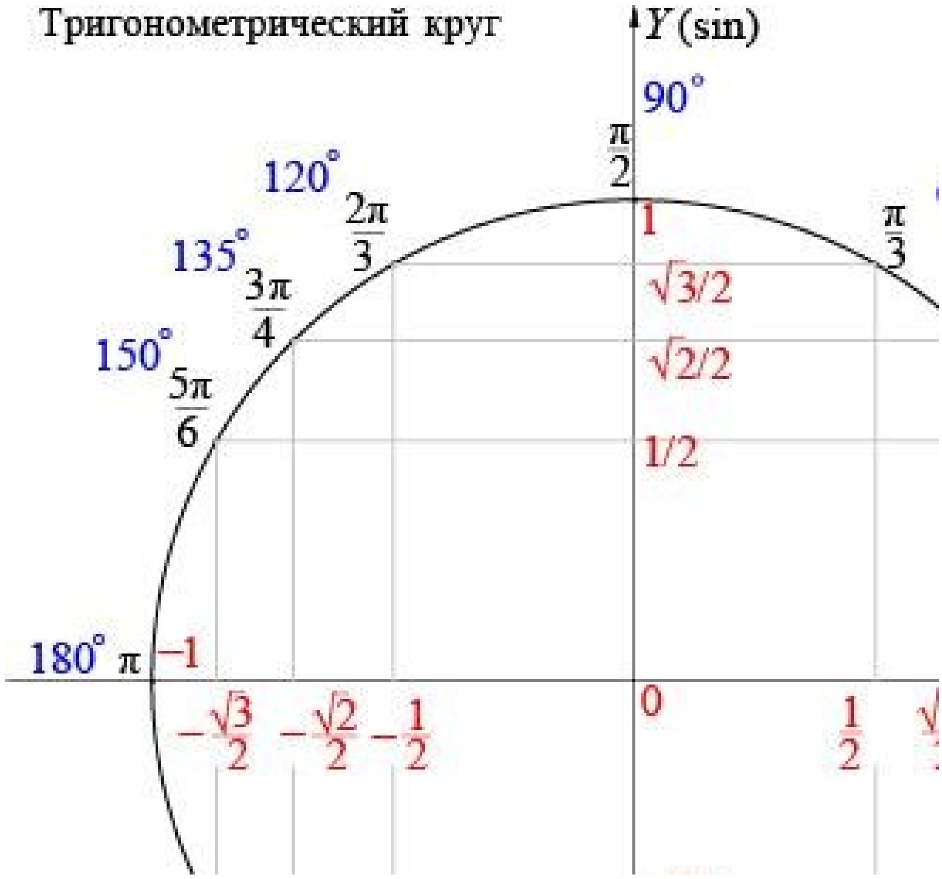


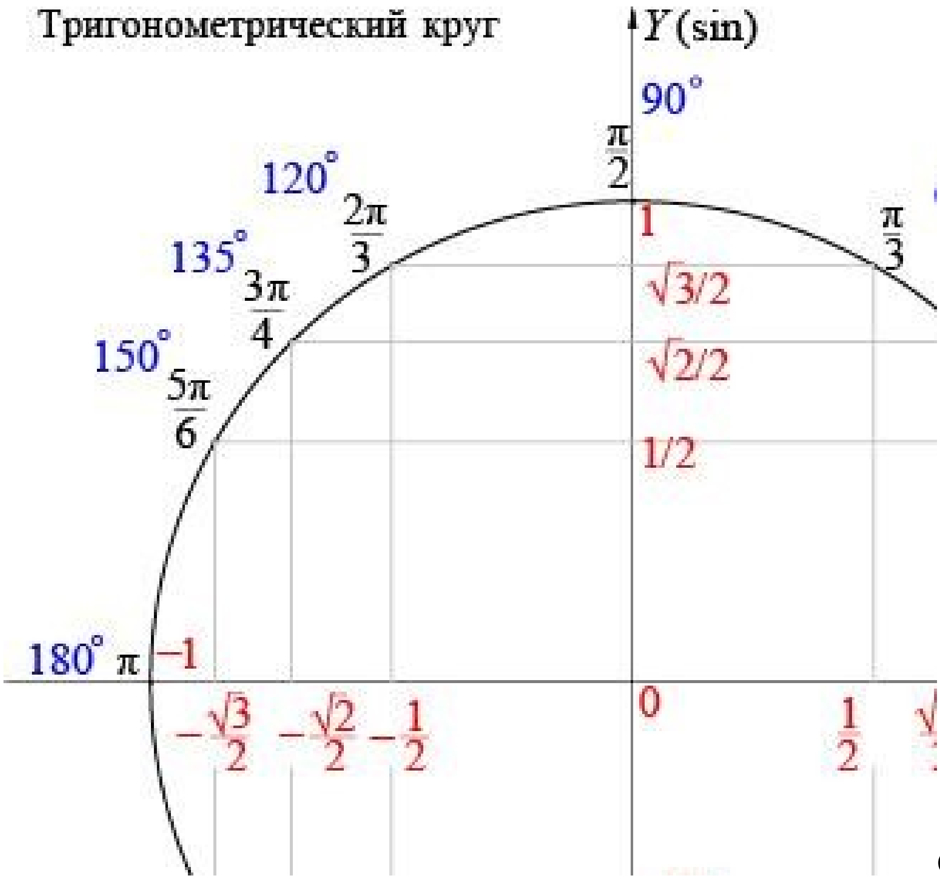
Функція $y = \operatorname{tg} x$



Функція $y = \operatorname{ctg} x$







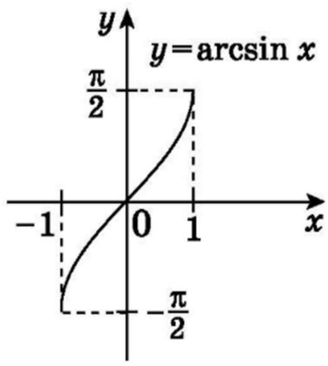
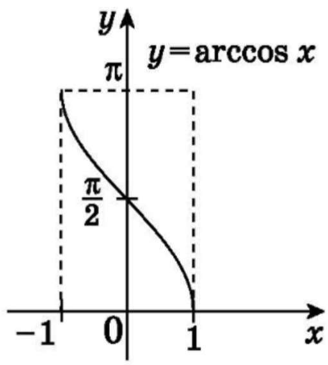
Обернені тригонометричні функції

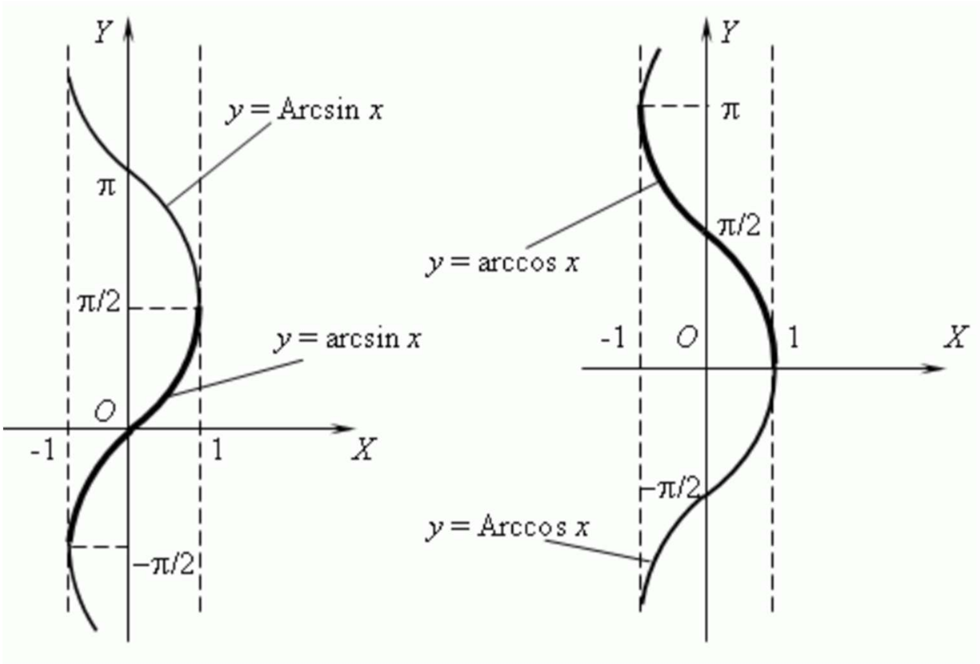
- арксинус $\arcsin x$ (в іноземній літературі позначення $\sin^{-1} x$) - кут, синус якого дорівнює x.
- арккосинус $\arccos x$ (в іноземній літературі позначення $\cos^{-1} x$) - кут, косинус якого дорівнює x
- арктангенс $arctgx$ (в іноземній літературі позначення $\tan^{-1} x$ або $\arctan x$)
- арккотангенс $arcctgx$ (в іноземній літературі позначення $arc\cot x$)
- арксеканс $arc\sec x$
- арккосеканс $arcco\sec x$ (в іноземній літературі позначення $arc\csc x$)

Обернені тригонометричні функції

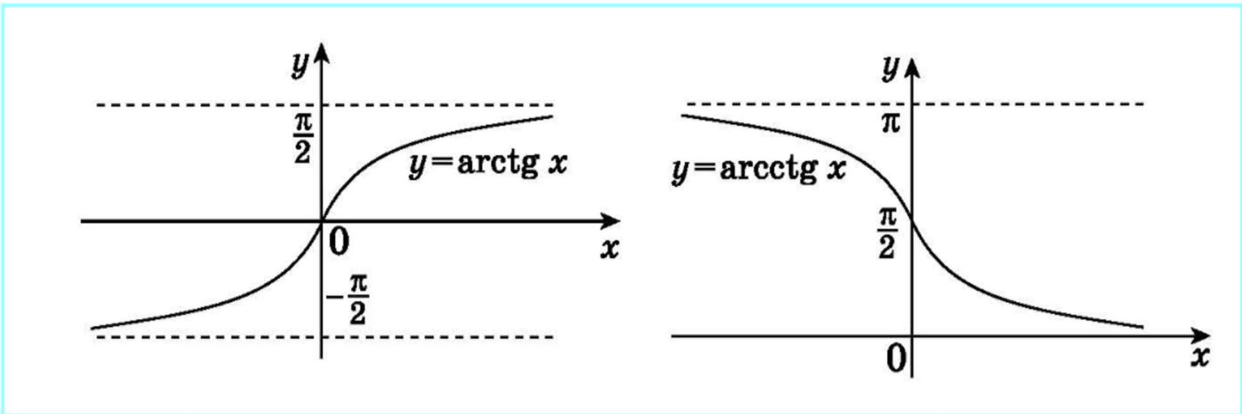
Оберненими тригонометричними функціями називають:

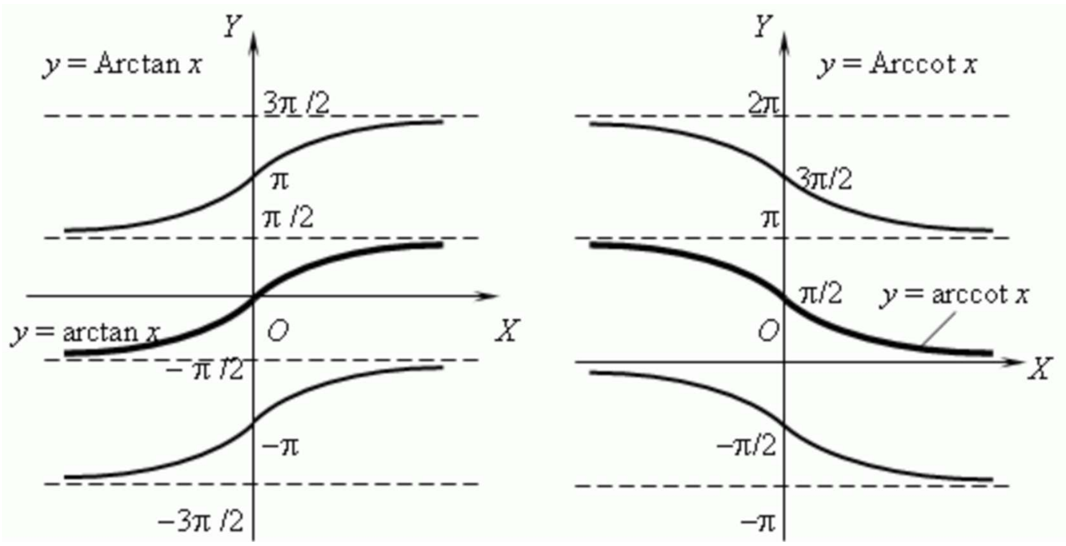
1) *арксинус* $y = \arcsin x, D(f) = [-1;1]$;
2) *арккосинус* $y = \arccos x, D(f) = [-1;1]$;
3) *арктангенс* $y = \operatorname{arctg} x, D(f) = \mathbb{R}$;
4) *арккотангенс* $y = \operatorname{arcctg} x, D(f) = \mathbb{R}$.

Функція $y = \arcsin x$	**Функція** $y = \arccos x$
	



Функція $y = \operatorname{arctg} x$ **Функція** $y = \operatorname{arcctg} x$





Гіперболічні функції

Гіперболічними функціями називають:

1) *гіперболічний синус*

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, D(f) = \mathbb{R};$$

2) *гіперболічний косинус*

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, D(f) = \mathbb{R};$$

3) *гіперболічний тангенс*

$$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, D(f) = \mathbb{R};$$

4) *гіперболічний котангенс*

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

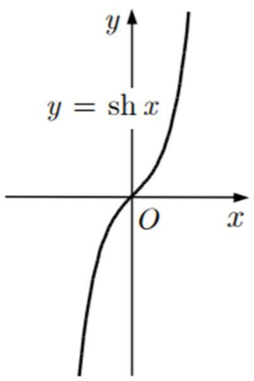


Рис. 2.20. Графік гіперболічного синуса

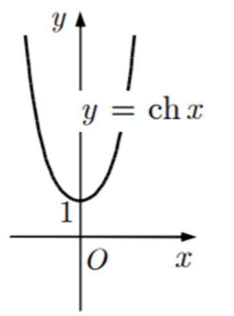


Рис. 2.21. Графік гіперболічного косинуса

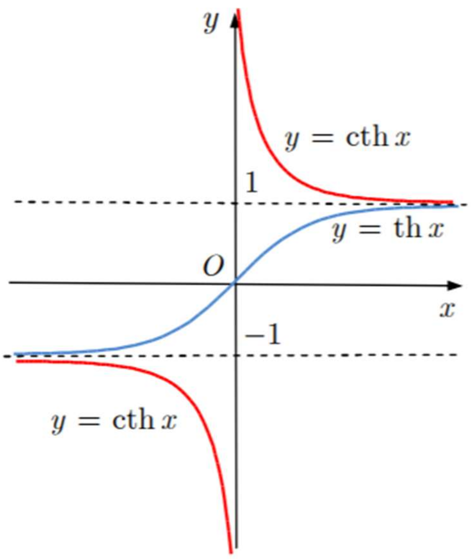


Рис. 2.22. Графіки гіперболічних тангенса і котангенса

<u>**Назва**</u> **«гіперболічні»** випливає з того, що параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = cht \\ y = sht \end{cases}$$

задають гіперболу.

Піднесемо обидві частини обох рівнянь до квадрата і віднімемо від першого друге.

$$x^2 - y^2 = \underbrace{ch^2t - sh^2t}_{1}$$ (перевіряється безпосередньо підстановкою).

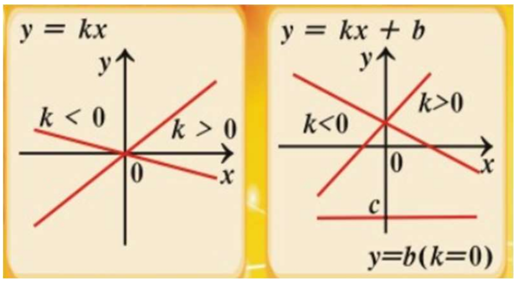
$x^2 - y^2 = 1$ - рівняння гіперболи.

Співвідношення для гіперболічних функцій схожі на співвідношення для тригонометричних функцій:

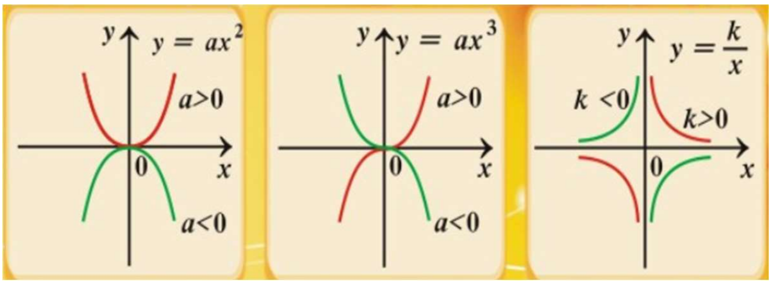
1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

2) $\begin{cases} \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y; \end{cases}$

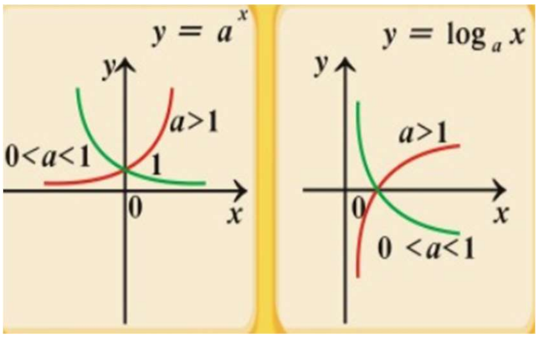
3) $\begin{cases} \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x, \\ \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x. \end{cases}$



лінійні функції



степеневі функції



показникові і логарифмічні функції