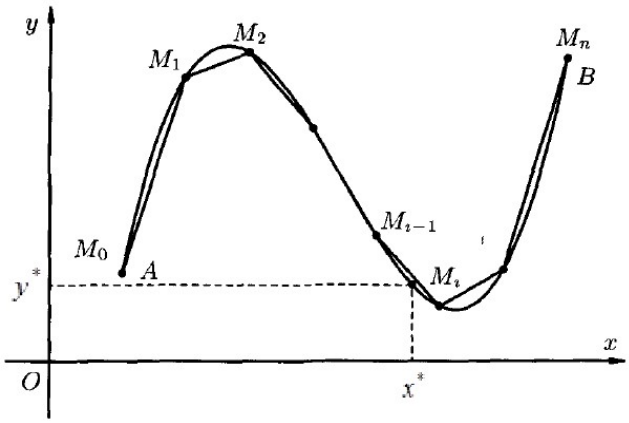
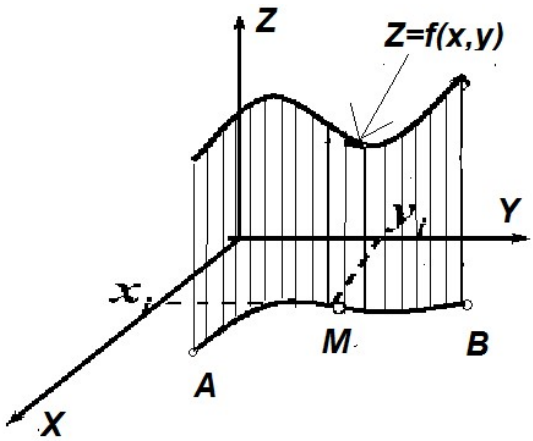
Криволінійні інтеграли

Криволінійні інтеграли бувають першого і другого роду.

Криволінійний інтеграл першого роду (по довжині дуги)





Нехай на площині Oxy задана неперервна крива AB (або L) довжиною l.

Розглянемо неперервну функцію $f(x;y)$, визначену в точках дуги AB. Розіб'ємо криву AB точками $M_0 = A, M_1, M_2, ..., M_n = B$ на n довільних дуг $M_{i-1}M_i$, що мають довжину $\Delta l_i \left(i = 1,2,...,n\right)$. Оберемо на кожній дузі $M_{i-1}M_i$ довільну точку $\left(x^*, y^*\right)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x^*; y^*\right)\Delta l_i \qquad (1)$$

Ця сума називається інтегральною сумою для функції $f(x;y)$ по кривій AB.

Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$ - найбільша з довжин дуг ділення. Якщо при $\lambda \to 0$ (тоді $n \to \infty$) існує скінченна границя інтегральних сум (1), її називають **криволінійними інтегралом від функції** $f(x;y)$ **першого роду** (криволінійний інтеграл по довжині кривій (дуги) AB) і позначають

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl \qquad \text{або} \qquad \int\limits_{L} f(x;y)dl .$$

Таким чином, за означенням

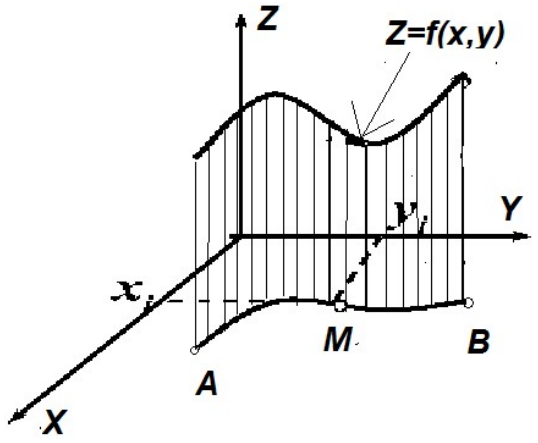
$$\int_{AB} f(x;y)dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x^*;y^*)\Delta l_i \qquad (2)$$

Теорема. (умова існування криволінійного інтегралу I роду).

Якщо функція $f(x;y)$ неперервна в кожній точці гладкої кривої, то криволінійний інтеграл I роду існує і його величина не залежить ні від способу розбиття кривої на частини, ні од вибору точок у них.

Зауваження. Аналогічно вводиться поняття криволінійного інтегралу від функції трьох змінних $f(x;y;z)$ по просторової кривої L.

Геометричний зміст криволінійного інтегралу I роду



Нехай функція $z = f(x;y) \geq 0$ для усіх точок кривої AB.

Якщо направляюча циліндричної поверхні є крива AB, що лежить в площині Oxy, а твірна паралельна осі Oz, то **площина поверхні**, обмежена зверху функцією $z = f(x;y)$ находиться за формулою $S = \int_{AB} f(x;y)dl$

Зауваження. Довжина дуги AB обчислюється за формулою $l = \int_{AB} dl$.

Основні властивості криволінійного інтегралу I роду

1. $\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{BA} f(x;y)dl$, тобто криволінійний інтеграл I роду не залежить від напряму шляху інтегрування.

2. $\int_{AB} c\cdot f(x;y)dl = c\cdot\int_{AB} f(x;y)dl, \quad c = const$.

3. $\int_{L}\left(f_1(x;y) \pm f_2(x;y)\right)dl = \int_{L} f_1(x;y)\,dl \pm \int_{L} f_2(x;y)dl$

4. $\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_{L_1} f(x;y)dl + \int\limits_{L_2} f(x;y)dl$, якщо шлях інтегрування L розбитий на частини L_1 і L_2 так, що $L = L_1 \cup L_2$ і частини L_1 і L_2 мають єдину загальну точку.

5. Якщо для точок кривої L виконана нерівність $f_1(x,y) \le f_2(x,y)$, то $\int\limits_L f_1(x,y)dl \le \int\limits_L f_2(x,y)dl$.

6. $\int\limits_{AB} dl = l$, де l - довжина кривої AB.

7. Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на кривій AB, то цій кривій знайдеться точка $(x_c;y_c)$ така, що $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = (x_c;y_c)\cdot l$.

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Обчислення криволінійного інтеграла I роду може бути зведено до обчислення визначеного інтеграла.

Представлення кривої інтегрування в явному вигляді.

Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_a^b f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+(y(x))'^2}dx$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_L (x+y)dl$, де L відрізок прямої $y = 5x$ між точками $A(0;0)$ і $B(1;5)$.

Рішення. $y = 5x$, $y' = (5x)' = 5$

$$\int\limits_{AB} (x+y)dl = \int\limits_0^1 (x+5x)\cdot\sqrt{1+5^2}dx = \sqrt{26}\int\limits_0^1 6xdx = \sqrt{26}\left(6\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1\right) = 3\sqrt{26}$$

Представлення кривої інтегрування в параметричному вигляді.

Якщо крива AB задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$, то

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{(x(t))'^2 + (y(t))'^2}\,dt$$

Представлення кривої інтегрування в полярних координатах.

Якщо крива AB задана рівнянням в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$\int_{AB} f(x;y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \cdot \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho(\varphi))'^2}\,d\varphi$$

Криволінійні інтеграли другого роду (по координатах)

Криволінійні інтеграли обчислюються не від звичайних функцій, а від вектор функцій $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, де функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ - неперервні на кривій L.

Криволінійний інтеграл II роду має загальний вигляд $\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x,y)dy$

і визначається рівністю

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} P(x;y)dx + \int_{AB} Q(x;y)dy.$$

Властивості криволінійного інтегралу II роду.

1. При зміні напрямку шляху інтегрування криволінійний інтеграл II роду змінює знак на протилежний, тобто $\int_{AB} = -\int_{BA}$
2. Якщо крива AB точкою C розбита на дві частини AC і CB, то інтеграл за усією кривою дорівнює сумі інтегралів від її частин:

$$\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB}$$

3. Якщо крива AB належить площині, перпендикулярній осі Ox, то

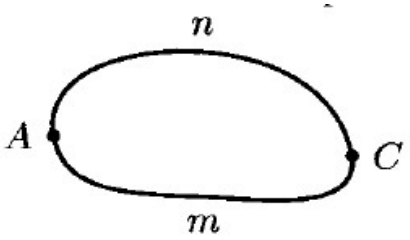
$$\int_{AB} P(x;y)dx = 0,$$

аналогічно якщо крива AB належить площині, перпендикулярній осі Oy, то

$$\int_{AB} Q(x;y)dy = 0$$

4. Криволінійний інтеграл по замкненій кривій не залежить від вибору початкової точки і залежить тільки від напряму обходу кривої.

$$\oint_{AmCnA} = \int_{AmC} + \int_{CnA}$$



$$\oint_{CnAmC} = \int_{CnA} + \int_{AmC}.$$

$$\oint_{AmCnA} = \oint_{CnAmC}.$$

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

а) якщо крива $AB \subset \mathbb{R}^3$ і задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, і початковій точці кривої відповідає значення параметра $t = t_A$, а кінцевій точці - $t = t_B$, то

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{t_A}^{t_B} \Big[P(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t) +$$

$$+ Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t),y(t),z(t)) \cdot z'(t) \Big] dt$$

б) якщо крива $AB \subset \mathbb{R}^2$ і задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, і початковій точці кривої відповідає значення параметра $t = t_A$, а кінцевій точці - $t = t_B$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_A}^{t_B} \left[P(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t)) \cdot y'(t) \right] dt .$$

в) якщо крива $AB \subset \mathbb{R}^2$ задана рівнянням $y = y(x)$, і початковій точці кривої відповідає значення $x = x_A$, а кінцевій точці - $x = x_B$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x)) \cdot y'(x) \right] dx$$

Аналогічно, якщо крива $AB \subset \mathbb{R}^2$ задана рівнянням $x = x(y)$, і початковій точці кривої відповідає значення $y = y_A$, а кінцевій точці - $y = y_B$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_A}^{y_B} \left[P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y) \right] dy$$

Зауваження 1. Нижня межа визначених інтегралів у правій частині наведених формул для обчислення криволінійних інтегралів другого роду не обов'язково менша за верхню.

Зауваження 2. При виведенні формул для криволінійного інтеграла другого роду враховувались формули для диференціала функції.

Для пункту а) $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$, $dz = z'(t)dt$;

для пункту б) $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$;

для пункту в) $dy = y'(t)dx$, $dx = x'(t)dy$.

Цей факт зручно використовувати при обчисленні криволінійних інтегралів другого роду, попередньо обчисливши ці диференціали, а потім застосуваваши відповідні формули для обчислення вказаних інтегралів.

Приклад Обчислити інтеграл $\int\limits_L -x\cos y dx + y\sin x dy$, де L – відрізок, що з'єднує точки $O(0;0)$ і $A(\pi;2\pi)$.

Спочатку визначимо шлях інтегрування OA. Легко бачити, що рівняння OA буде $y=2x$ ($y=kx$, $k=\frac{2\pi}{\pi}=2$). Звідси $dy=2dx$.

$$\int\limits_L -x\cos y dx + y\sin x dy = \int\limits_0^{\pi} -x\cos 2x dx + 2x\sin x 2dx = \int\limits_0^{\pi} x(-\cos 2x + 4\sin x)dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x \\ dv = (-\cos 2x + 4\sin x)dx \end{matrix}\middle| \begin{matrix} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\sin 2x - 4\cos x \end{matrix}\right\} = x\left(-\frac{1}{2}\sin 2x - 4\cos x\right)\Bigg|_0^{\pi} +$$

$$+\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + 4\cos x\right)dx = x\left(-\frac{1}{2}\sin 2x - 4\cos x\right)\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{4}\cos 2x\Bigg|_0^{\pi} + 4\sin x\Bigg|_0^{\pi} = 4\pi .$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_L xdx + ydy + (x+y-1)dz$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1;1;1)$ і $B(2;3;4)$.

Спочатку згадуємо рівняння прямої, що проходить через дві точки.

$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{4-1}$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}(=t)$, або $x=t+1$, $y=2t+1$, $z=3t+1$.

При переміщенні від точки A до точки B параметр t змінюється від 0 до 1;

$$\int\limits_L xdx + ydy + (x+y-1)dz = \int\limits_0^1 (t+1)dt + (2t+1)2dt + (t+1+2t+1-1)3dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (14t+6)dt = \left(7t^2 + 6t\right)\Bigg|_0^1 = 7 + 6 = 13 .$$