Лекція 14.Застосування кратних інтегралів

Застосування кратних інтегралів

Геометричні застосування подвійного інтегралу

Обчислення площ плоских фігур

Площа S_D області $D \subset \mathbf{R}^2$ обчислюється за формулою:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy .$$

Якщо $D: \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \quad a \le x \le b$ (рис.3.14), то

$$S_D = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy .$$

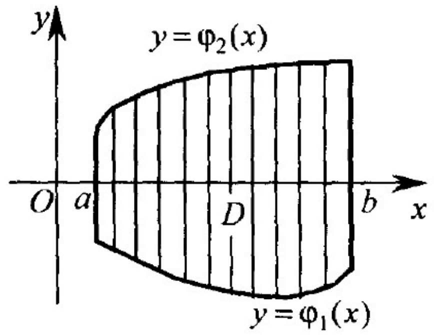

Рис.3.14

Якщо $D: \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \quad c \le y \le d$ (рис.3.15), то

$$S_D = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx .$$

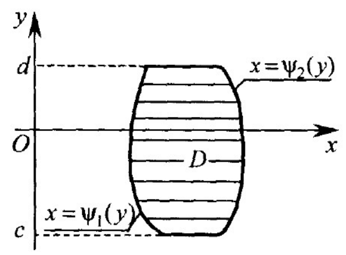

Рис.3.15

Якщо область D обмежена лініями, рівняння яких задаються у полярній системі координат $D: \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ (рис.3.16), то площа S_D обчислюється за формулою:

$$S_D = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho \, d\rho .$$

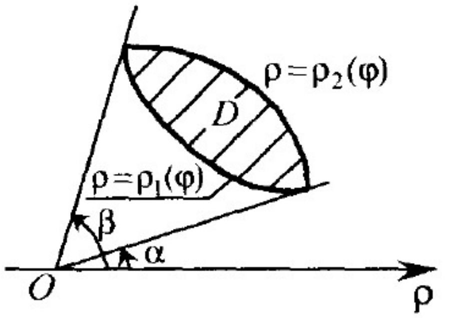

Рис.3.16

Обчислення об'єму тіла

Об'єм циліндричного тіла G, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини xOy, а зверху – поверхнею σ: $z = f(x,y)$, $f(x,y) \ge 0$ в області D, $\text{пр}_{xOy}\sigma = D$ (рис.3.17), обчислюється за формулою:

$$V = \iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy .$$

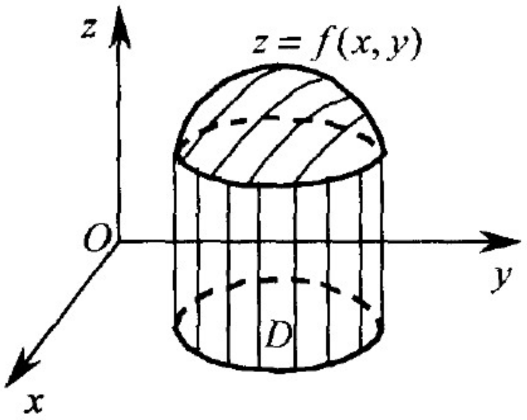

Рис.3.17

Якщо тіло G обмежене знизу поверхнею з рівнянням $z = f_1(x, y)$, зверху – поверхнею з рівнянням $z = f_2(x, y)$, а проекція верхньої та нижньої поверхонь на площину xOy є областю D (рис.3.18), то об'єм тіла G обчислюється за формулою:

$$V_G = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y))\, dxdy\,.$$

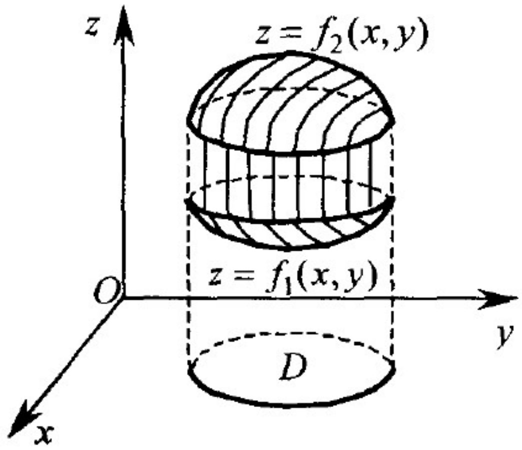

Рис.3.18

Обчислення площі поверхні

Якщо поверхня σ задається рівнянням $z = f(x, y)$ і її проекція на площину xOy є замкнена область D, то площа S_σ поверхні σ обчислюється за формулою:

$$S_\sigma = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\, dxdy\,.$$

<u>Фізичні застосування подвійного інтегралу</u>

Обчислення маси матеріальної пластинки

Якщо пластинка лежить у площині xOy і має форму замкненої області D, в кожній точці якої задана поверхнева густина $\mu = \mu(x, y)$, то маса m пластинки обчислюється за формулою:

$$m = \iint_D \mu(x, y)\, dxdy\,.$$

Середня густина $\mu_{\text{сер}}$ матеріальної пластинки

Якщо маса пластинки дорівнює m, а площа пластинки S, то середня густина пластинки

$$\mu_{\text{сер}} = \frac{m}{S} = \frac{\iint\limits_D \mu(x, y)\, dxdy}{\iint\limits_D dxdy},$$

де $\mu(x, y)$ – густина пластинки у кожній точці пластинки.

Статичні моменти пластинки D відносно осей Ox і Oy знаходяться за формулами:

$$M_x = \iint\limits_D y\mu(x, y)\, dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D x\mu(x, y)\, dxdy.$$

У випадку однорідної пластинки $\mu = \text{const}$.

Координати центра ваги пластинки обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

де m – маса пластинки, M_x, M_y – її статичні моменти відносно координатних осей.

У випадку однорідної пластинки ці формули приймають вигляд:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\, dxdy}{S}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\, dxdy}{S},$$

де S – площа області D.

Моменти інерції пластинки D відносно осей Ox і Oy знаходяться за формулами:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \mu(x, y)\, dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \mu(x, y)\, dxdy,$$

а момент інерції відносно початку координат – за формулою:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\mu(x, y)\, dxdy = I_x + I_y.$$

Застосування потрійного інтеграла

Обчислення об'єму тіла

Об'єм тіла $G \subset \mathbf{R}^3$ обчислюється за формулою:

$$V = \iiint\limits_G dxdydz .$$

Обчислення маси матеріального тіла $G \subset \mathbf{R}^3$

Якщо матеріальне тіло G має об'ємну густину $\mu = \mu(x, y, z)$, то маса тіла обчислюється за формулою:

$$m = \iiint\limits_G \mu(x, y, z)\, dxdydz .$$

Середня густина $\mu_{\text{сер}}$ **тіла** G є відношенням маси тіла до його об'єму, тобто:

$$\mu_{\text{сер}} = \frac{m}{V} = \frac{\iiint\limits_G \mu(x, y, z)\, dxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz} ,$$

де $\mu(x, y, z)$ – густина тіла G у кожній точці.

Статичні моменти тіла G відносно координатних площин знаходяться за формулами:

$$M_{yz} = \iiint\limits_G x\mu\, dxdydz , \quad M_{zx} = \iiint\limits_G y\mu\, dxdydz , \quad M_{xy} = \iiint\limits_G z\mu\, dxdydz .$$

Координати центра ваги тіла G визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} , \quad y_c = \frac{M_{zx}}{m} , \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m} ,$$

або

$$x_c = \frac{1}{m} \iiint\limits_G x\mu\, dxdydz , \quad y_c = \frac{1}{m} \iiint\limits_G y\mu\, dxdydz , \quad z_c = \frac{1}{m} \iiint\limits_G z\mu\, dxdydz ,$$

де m – маса тіла G.

При $\mu = 1$ маємо

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_G x\,dxdydz\,, \quad y_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_G y\,dxdydz\,, \quad z_c = \frac{1}{V}\iiint\limits_G z\,dxdydz\,,$$

де V – об'єм тіла G.

Моменти інерції тіла G відносно осей координат відповідно знаходяться за формулами:

$$I_x = \iiint\limits_G (y^2 + z^2)\mu\,dxdydz\,, \quad I_y = \iiint\limits_G (z^2 + x^2)\mu\,dxdydz\,,$$

$$I_z = \iiint\limits_G (x^2 + y^2)\mu\,dxdydz\,.$$