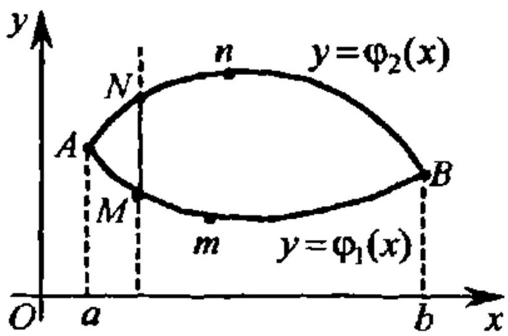
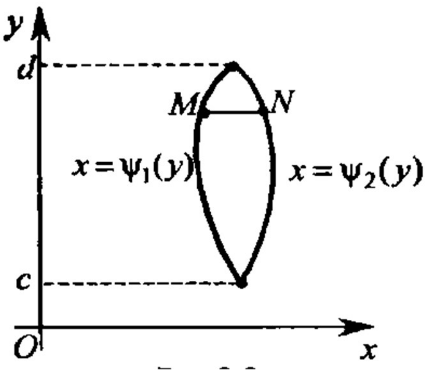
Кратні інтеграли

Обчислення подвійного інтеграла в декартових і полярних координатах

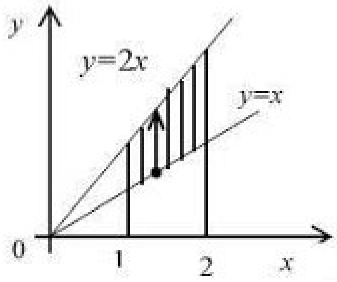
В декартових координатах:

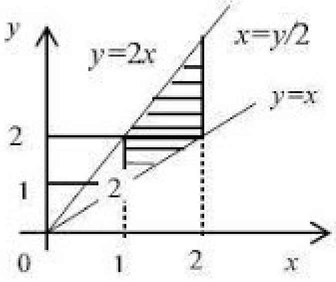
Якщо область D правильна у напрямі осі Ox і $D: a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$  $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy$	Якщо область D правильна у напрямі осі Oy і $D: c \le y \le d,\ \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x)$  $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x;y)\,dx$

Якщо область D правильна у напрямі осі Ox та осі Oy, то можна обчислювати двократний інтеграл обома методами.

Приклад. Треба виразити двократний інтеграл через повторний двома методами

$I = \iint\limits_{D} f\left(x; y\right) dxdy$, де область $D: x = 1,\ x = 2,\ y = x,\ y = 2x$.





$$I = \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x, y) dy = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{1}^{y} f(x, y) dx + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x, y) dx$$

Перехід від лівої частини формули до правої і навпаки називається зміною порядку інтегрування.

Зауваження 1. Якщо область D не є правильною ні у напрямі осі Ox, ні у напрямі осі Oy, то таку область необхідно розбити на частини, кожна з яких є правильною областю у напрямі осі Ox чи осі Oy.

Зауваження 2. У кожному конкретному випадку, залежно від області D та підінтегральної функції $f\left(x, y\right)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Обчислення подвійного інтегралу в полярних координатах.

Для спрощення обчислення подвійного інтегралу часто застосовують метод заміни змінних, тобто вводять нові змінні під знаком подвійного інтегралу.

Нехай змінні x і y пов’язані зі змінними u і v формулами:

$$\begin{cases} x = \varphi(u;v) \\ y = \psi(u;v) \end{cases}.$$

Формули встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками $M(x,y)$ області D площини Oxy і точками $M^*(u,v)$ деякої області D^* площини Ouv . Якщо **визначник Якобі** (або **якобіан**)

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (1)$$

то має місце **загальна формула заміни змінних у подвійному інтегралі**:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f\big(x(u,v);y(u,v)\big)\cdot|I|\,dudv \qquad (2)$$

Розглянемо окремий випадок заміни змінних, що часто використовується при обчисленні подвійного інтегралу, а саме заміну декартових координат x і y полярними координатами ρ і φ.

Полярні координати зв’язані з декартовими формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}.$$

Праві частини цих формул – неперервні диференційовані функції. Якобіан перетворення за формулою (1) визначається як

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad I(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

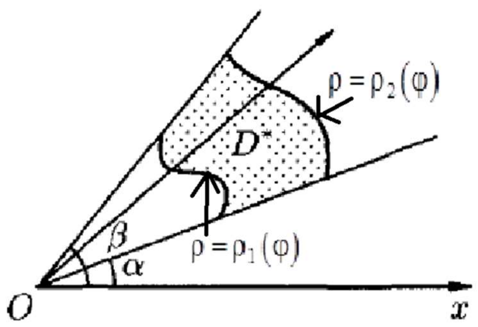
Тоді за (2), формула переходу до полярних координат набуває вигляду:

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f\big(x(u,v);y(u,v)\big)\cdot|I|\,dudv \quad \text{- формула 2}$$

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi \qquad (3)$$

Формула (3) формула переходу до полярних координат, де область D задана в декартовій системі координат, а область D^* відповідна їй область у полярній системі координат.

Для обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах застосовують те ж саме правило приведення подвійного інтегралу до повторного.



Якщо область D^* обмежена променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$, де $\alpha < \beta$, кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$, де $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$ і область D^* правильна (промінь, що виходить із полюса O, перетинає її межі не більше ніж в двох точках),

то за формулою (3):

$$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\cdot\rho\,d\rho \qquad (4)$$

Зауваження.

1. Перехід до полярних координат корисний, коли підінтегральна функція має вигляд $f\left(x^2+y^2\right)$; область D - це коло, кільце або частина них.

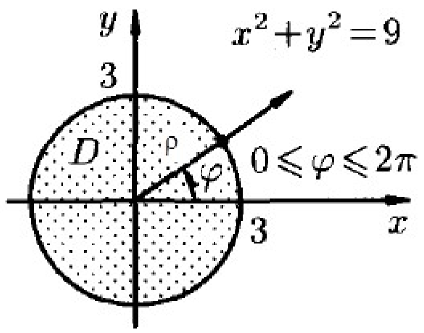
2. На практиці перехід до полярних координат здійснюється шляхом заміни $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$. Перетворення області D в область D^* не виконують, а поєднують декартову і полярну системи координат на одному малюнку.

Приклад. Обчисліть $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, де область D - коло $x^2 + y^2 \le 9$.

Розв’язок.

Застосував формулу (3) переходимо до полярних координат:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy = \iint\limits_{D^*} \sqrt{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2}\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{D^*} \sqrt{\rho^2}\rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{D^*} \rho^2 d\rho d\varphi$$



Область D у полярній системі координат визначається нерівностями $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 3$.

Зауважимо, що область D - коло перетворюється в область D^* - прямокутник.

$$\iint\limits_{D^*} \rho^2 d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho^2 d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^3 \right) = \int\limits_0^{2\pi} 9 d\varphi = 9\varphi\Big|_0^{2\pi} = 18\pi$$

Потрійний інтеграл

Узагальненням визначеного інтеграла на випадок функції трьох змінних є потрійний інтеграл.

Потрійний інтеграл позначається так:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dV, \qquad \iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz.$$

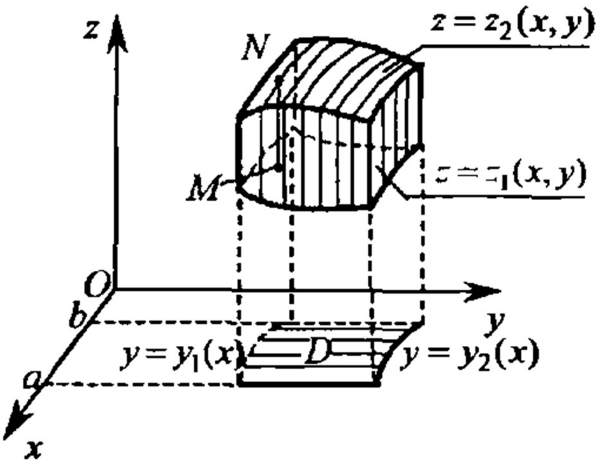
Потрійний інтеграл за означенням дорівнює інтегральній сумі:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\cdot \Delta V_i$$

Теорема. Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, то існує потрійний інтеграл від функції $f(x,y,z)$ по області G

Потрійний інтеграл має ті ж самі властивості, що і подвійний інтеграл.

В декартових координатах обчислення потрійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.



Нехай область G обмежена знизу і зверху поверхнями $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$ відповідно, а з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz. Проекція області G на площину Oxy позначимо через D. Область D обмежена кривими $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$, а $x \in [a,b]$.

Якщо кожна пряма, яка паралельна осі Oz перетинає границю області G лише у двох точках, а проекція області G на площину Oxy є правильною областю D, то область G називається правильною у напрямі осі Oz.

Переходячи від потрійного інтеграла до повторного, якщо область G правильна, одержуємо формулу:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz .$$

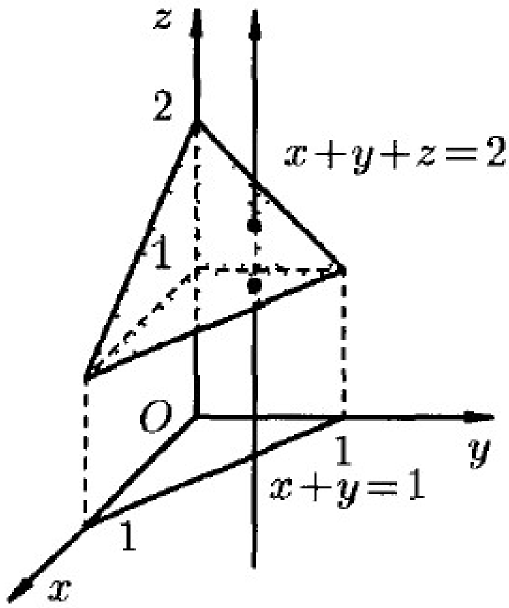
Зауваження.

1. Порядок інтегрування може бути і іншим, тобто змінні x, y і z за певних умов можна міняти місцями.

2. Якщо область G складна, то її треба розбити на скінченну кількість правильних областей, до яких застосувати вище визначену формулу.

Приклад. Обчисліть $\iiint\limits_G xdxdydz$, де область G обмежена площинами $x=0$, $y=0$, $z=1$, $x+y+z=2$.

Розв’язок.



Область G є правильною у напрямі осі Oz.

$$\iiint\limits_G xdxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_1^{2-x-y} xdz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \left(xz\Big|_1^{2-x-y} \right) = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} x\left(1-x-y\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(x - x^2 - xy\right)dy = \int\limits_0^1 dx \left(\left(xy - x^2 y - x\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x} \right) =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x\left(1-x\right) - x^2\left(1-x\right) - \frac{x\left(1-x\right)^2}{2} \right)dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - 0 = \frac{6+8+3}{24} = \frac{17}{24}$$