Лекція 9

Диференціювання функції багатьох змінних
(продовження)

Частинні похідні другого порядку

Нехай для функції $z = f(x;y)$ визначені частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, які, в загальному випадку також є функціями змінних x і y. Отже, від цих функцій можна знову знайти частинні похідні як за змінною x, так і за змінною y. Ці похідні називаються ***частинними похідними другого порядку*** функції $z = f(x;y)$.

Для похідних другого порядку застосовують наступні позначення:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$ – функція диференціюється послідовно два рази по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y)$ – функція диференціюється послідовно два рази по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y)$ – функція диференціюється спочатку по x, а результат потім диференціюється по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y)$ – функція диференціюється спочатку по y, а результат потім диференціюється по x.

Останні дві похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають **мішаними**.

Теорема. Якщо частинні похідні другого порядку неперервні, то мішані похідні рівні між собою за умови їх неперервності:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1)'_x = 4x^3 - 4xy^3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1)'_y = -6x^2y^2 + 5y^4.$$

Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 - 4xy^3)'_x = 12x^2 - 4y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_y = -12x^2y + 20y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_x = -12xy^2.$$

Диференціали вищих порядків

Диференціал 2-го порядку функції $z = f(x, y)$ означують формулою

$$\boxed{d^2 z = d(dz).}$$

Якщо функція f має неперервні частинні похідні і змінні x та y незалежні, то

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

У разі незалежних змінних x та y для *диференціала m-го порядку* функції z, який означають рівністю

$$\boxed{d^m z = d(d^{m-1} z),}$$

маємо аналогічну формулу:

$$\boxed{d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m z,}$$

Похідна за напрямом

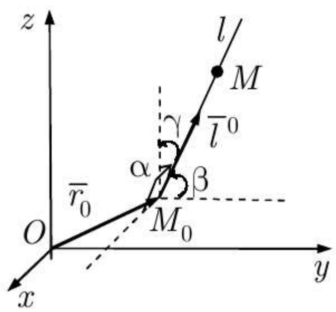
Будь-який напрям l у просторі можна задати одиничним вектором

$$\overline{l}^{\,0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix},$$

де α, β, γ — кути, утворені напрямом l з осями Ox, Oy і Oz.

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ означена в деякому околі точки M_0 з радіусом вектором

$$\overline{r_0} = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}.$$



Похідною функції $u = f\left(x, y, z\right)$ **за даним напрямом** $\vec{l}$ **в точці** M_0 називається границя $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{u\left(M\right) - u\left(M_0\right)}{M_0 M}$, яка позначається $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ або $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$.

Тут $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $M_0\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z\right)$, $M_0 M = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Отже, за означенням $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{u\left(M\right) - u\left(M_0\right)}{M_0 M}$.

Якщо функція $u = f\left(x, y, z\right)$ диференційована, то **має місце формула**

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни функції за даним напрямом.

Приклад. Знайти похідну функції $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ у точці $M(1;2;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

Розв’язування прикладу

1. Похідна функції $u = f(x, y, z)$ за напрямом $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2. *Знайдемо частинні похідні заданої функції $u(x,y,z)$ у точці* $M(1;2;1)$.

Вважаючи y і z сталими, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\ln(x^2 + y^2 + z^2)\right)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \frac{2}{1+4+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Вважаючи x і z сталими, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\ln(x^2 + y^2 + z^2)\right)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Вважаючи x і y сталими, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\ln(x^2 + y^2 + z^2)\right)'_z = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3. Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l} = (2;4;4)$.

$$\left|\vec{l}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6; \quad \cos\alpha = \frac{l_x}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \ \cos\beta = \frac{l_y}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \ \cos\gamma = \frac{l_z}{\left|\vec{l}\right|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

4. Знайдемо шукану похідну.

За формулою $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma$ знаходимо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{9}.$$

Градієнт функції.

Означення. Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі відповідні частинні похідні даної функції:

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{z}.$$

Градієнт вказує напрямок найшвидшого зростання функції в даній точці. Похідна у напрямі градієнта має найбільше значення, тобто у напрямі $\vec{l} = grad u$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |grad u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Приклад. Знайти градієнт функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ у точці $M_0(1;-1;2)$.

Розв'язування прикладу

1. Згідно з означенням **градієнт функції** $u(x;y;z)$ у точці M_0 є вектор:

$$\text{grad}u(M_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \vec{k}.$$

2. Обчислімо частинні похідні заданої функції в точці M_0.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz\right)'_x = 2x - 2yz; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 2 + 4 = 6;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz\right)'_y = 2y - 2xz; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -2 - 4 = -6;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz\right)'_z = 2z - 2xy; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 4 + 2 = 6.$$

3. Знайдемо градієнт заданої функції.

$$\text{grad}\, u(M_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot \vec{k} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Відповідь: $\text{grad}u(M_0) = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}$