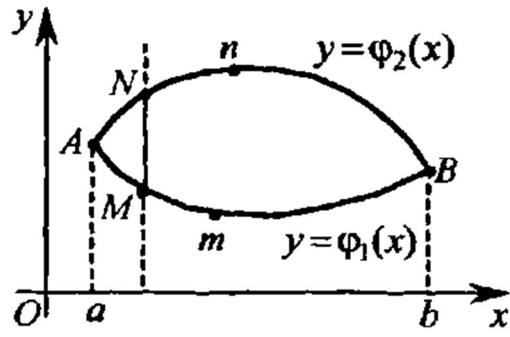
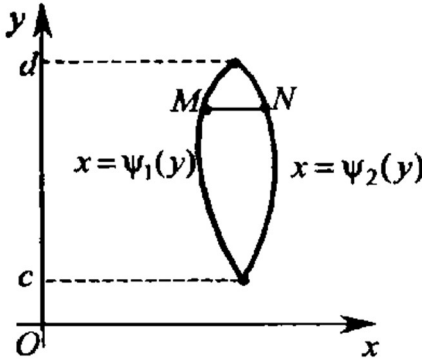


## Кратні інтеграли

## Обчислення подвійного інтеграла в декартових і полярних координатах

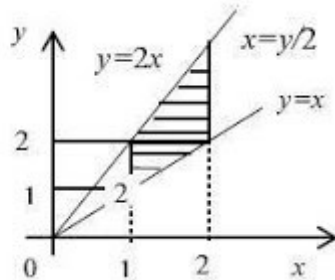
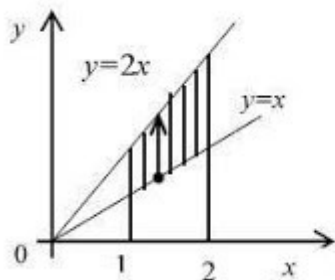
В декартових координатах:

<p>Якщо область <math>D</math> правильна у напрямі осі <math>Ox</math> і</p> <p><math>D: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)</math></p>  <p><math>\iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y) dy</math></p>	<p>Якщо область <math>D</math> правильна у напрямі осі <math>Oy</math> і</p> <p><math>D: c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)</math></p>  <p><math>\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x; y) dx</math></p>
---	--

Якщо область  $D$  правильна у напрямі осі  $Ox$  та осі  $Oy$ , то можна обчислювати двократний інтеграл обома методами.

Приклад. Треба виразити двократний інтеграл через повторний двома методами

$$I = \iint_D f(x; y) dx dy, \text{ де область } D: x = 1, x = 2, y = x, y = 2x.$$



$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \\ &= \int_1^2 dy \int_1^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx \end{aligned}$$

Перехід від лівої частини формули до правої і навпаки називається зміною порядку інтегрування.

**Зауваження 1.** Якщо область  $D$  не є правильною ні у напрямі осі  $Ox$ , ні у напрямі осі  $Oy$ , то таку область необхідно розбити на частини, кожна з яких є правильною областю у напрямі осі  $Ox$  чи осі  $Oy$ .

**Зауваження 2.** У кожному конкретному випадку, залежно від області  $D$  та підінтегральної функції  $f(x, y)$ , треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

## Обчислення подвійного інтегралу в полярних координатах.

Для спрощення обчислення подвійного інтегралу часто застосовують метод заміни змінних, тобто вводять нові змінні під знаком подвійного інтегралу.

Нехай змінні  $x$  і  $y$  пов'язані зі змінними  $u$  і  $v$  формулами:

$$\begin{cases} x = \varphi(u; v) \\ y = \psi(u; v) \end{cases}$$

Формули встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками  $M(x, y)$  області  $D$  площини  $Oxy$  і точками  $M^*(u, v)$  деякої області  $D^*$  площини  $Ouv$ . Якщо **визначник Якобі** (або **якобіан**)

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1)$$

то має місце **загальна формула заміни змінних у подвійному інтегралі**:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v); y(u, v)) \cdot |I| du dv \quad (2)$$

Розглянемо окремий випадок заміни змінних, що часто використовується при обчисленні подвійного інтегралу, а саме заміну декартових координат  $x$  і  $y$  полярними координатами  $\rho$  і  $\varphi$ .

Полярні координати зв'язані з декартовими формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

Праві частини цих формул – неперервні диференційовані функції. Якобіан перетворення за формулою (1) визначається як

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad I(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

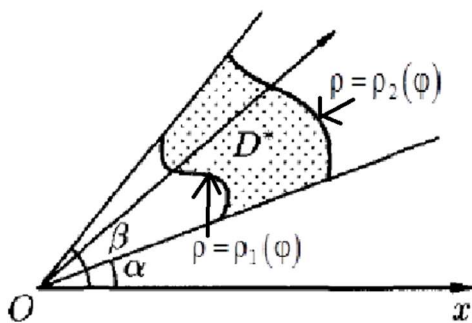
Тоді за (2), формула переходу до полярних координат набуває вигляду:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v); y(u, v)) \cdot |I| du dv \quad - \text{формула 2}$$

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi \quad (3)$$

Формула (3) формула переходу до полярних координат, де область  $D$  задана в декартовій системі координат, а область  $D^*$  відповідна їй область у полярній системі координат.

Для обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах застосовують те ж саме правило приведення подвійного інтегралу до повторного.



Якщо область  $D^*$  обмежена променями  $\varphi = \alpha$  і  $\varphi = \beta$ , де  $\alpha < \beta$ , кривими  $\rho = \rho_1(\varphi)$  і  $\rho = \rho_2(\varphi)$ , де  $\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$  і область  $D^*$  правильна (промінь, що виходить із полюса  $O$ , перетинає її межі не більше ніж в двох точках),

то за формулою (3):

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho \quad (4)$$

### Зауваження.

1. Перехід до полярних координат корисний, коли підінтегральна функція має вигляд  $f(x^2 + y^2)$ ; область  $D$  - це коло, кільце або частина них.

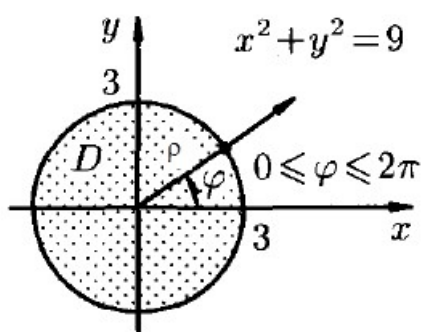
2. На практиці перехід до полярних координат здійснюється шляхом заміни  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $dx dy = \rho d\rho d\varphi$ . Перетворення області  $D$  в область  $D^*$  не виконують, а поєднують декартову і полярну системи координат на одному малюнку.

**Приклад.** Обчисліть  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , де область  $D$  - коло  $x^2 + y^2 \leq 9$ .

Розв'язок.

Застосувавши формулу (3) переходимо до полярних координат:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{D^*} \sqrt{(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2} \rho d\rho d\varphi = \iint_{D^*} \sqrt{\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \iint_{D^*} \rho^2 d\rho d\varphi$$



Область  $D$  у полярній системі координат визначається нерівностями  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \rho \leq 3$ .

Зауважимо, що область  $D$  - коло перетворюється в область  $D^*$  - прямокутник.

$$\iint_{D^*} \rho^2 d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^2 d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^3 \right) = \int_0^{2\pi} 9 d\varphi = 9\varphi \Big|_0^{2\pi} = 18\pi$$

## Потрійний інтеграл

Узагальненням визначеного інтеграла на випадок функції трьох змінних є потрійний інтеграл.

Потрійний інтеграл позначається так:

$$\iiint_G f(x, y, z) dV, \quad \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz.$$

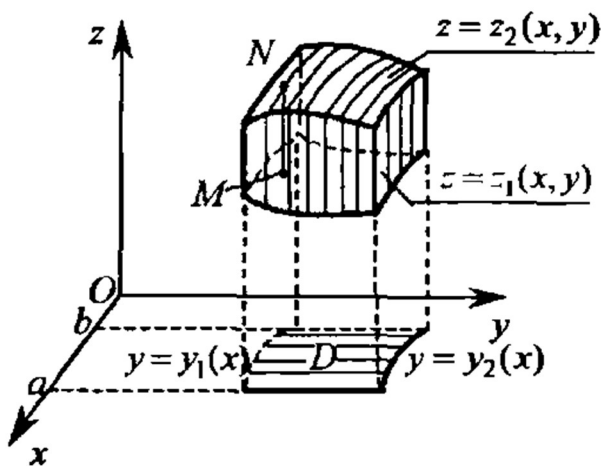
Потрійний інтеграл за означенням дорівнює інтегральній сумі:

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta V_i$$

**Теорема.** Якщо функція  $f(x, y, z)$  неперервна в обмеженій замкненій області  $G$ , то існує потрійний інтеграл від функції  $f(x, y, z)$  по області  $G$

Потрійний інтеграл має ті ж самі властивості, що і подвійний інтеграл.

В декартових координатах обчислення потрійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.



Нехай область  $G$  обмежена знизу і зверху поверхнями  $z = z_1(x, y)$  і  $z = z_2(x, y)$  відповідно, а з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі  $Oz$ . Проекція області  $G$  на площину  $Oxy$  позначимо через  $D$ . Область  $D$  обмежена кривими  $y = y_1(x)$  і  $y = y_2(x)$ , а  $x \in [a, b]$ .

Якщо кожна пряма, яка паралельна осі  $Oz$  перетинає границю області  $G$  лише у двох точках, а проекція області  $G$  на площину  $Oxy$  є правильною областю  $D$ , то область  $G$  називається правильною у напрямі осі  $Oz$ .

Переходячи від потрійного інтеграла до повторного, якщо область  $G$  правильна, одержуємо формулу:

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

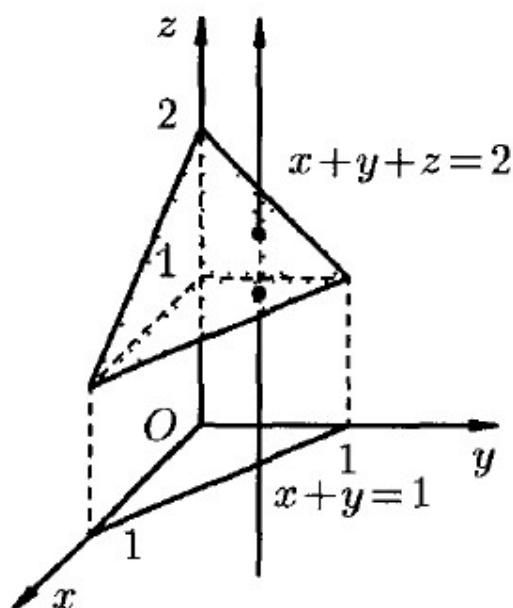
**Зауваження.**

1. Порядок інтегрування може бути і іншим, тобто змінні  $x, y$  і  $z$  за певних умов можна міняти місцями.

2. Якщо область  $G$  складна, то її треба розбити на скінченну кількість правильних областей, до яких застосувати вище визначену формулу.

**Приклад.** Обчисліть  $\iiint_G x dx dy dz$ , де область  $G$  обмежена площинами  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 1$ ,  $x + y + z = 2$ .

Розв'язок.



Область  $G$  є правильною у напрямі осі  $Oz$ .

$$\begin{aligned} \iiint_G x dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_1^{2-x-y} x dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (xz) \Big|_1^{2-x-y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1-x-y) dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x - x^2 - xy) dy = \int_0^1 dx \left( \left( xy - x^2 y - x \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} \right) = \\ &= \int_0^1 \left( x(1-x) - x^2(1-x) - \frac{x(1-x)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right) dx = \\ &= \left( \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - 0 = \frac{6+8+3}{24} = \frac{17}{24} \end{aligned}$$