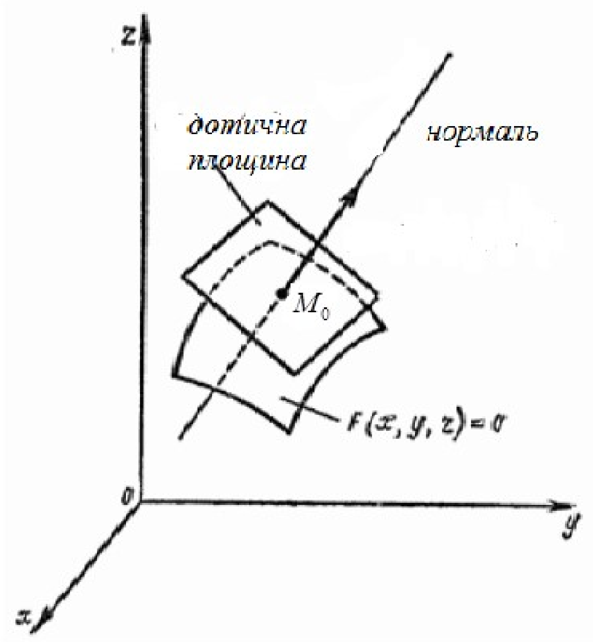
Дотична площина та нормаль до поверхні.

Означення. ***Дотичною*** площиною до поверхні в точці M_0 називається площина, в якій лежать усі дотичні, проведені в точці M_0 до всіх можливих кривих, що лежать на поверхні і проходять через точку M_0.

Означення. ***Нормаллю*** до поверхні в точці M_0 називається пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно дотичній площині в цій точці.



Якщо поверхня задана рівнянням $F(x,y,z)=0$, то **рівняння дотичної** площини в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ є

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0,$$

А **рівняння нормалі**:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

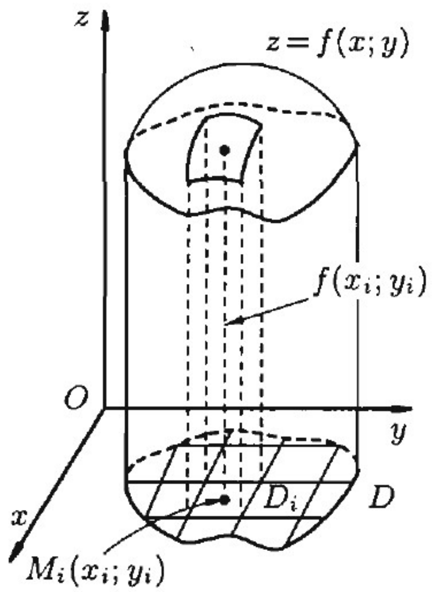
Якщо поверхня задана рівнянням $z=f(x,y)$, то **рівняння дотичної площини** в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ має вигляд:

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

а рівняння нормалі –

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

Подвійний інтеграл



Розглянемо тіло, яке зверху обмежене поверхнею $z = f(x; y)$, з боків - циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz, знизу - плоскою фігурою D на площині Oxy. Потрібно знайти об'єм V тіла.

З цією метою розкладемо область D скінченним числом кривих на частини $(D_1), (D_2),...,(D_i),...$, площі яких дорівнюють ΔS_i. Розглянемо ряд циліндричних стовпчиків, які мають у своїй нижній основі ці часткові області D_i, обмежені зверху частинами поверхні $z = f(x; y)$. У сукупності ці стовпчики утворюють дане тіло. Позначивши об'єм стовпчика з основою D_i через ΔV_i отримаємо $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$.

Візьмемо на кожній частині D_i довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і замінимо кожен стовпчик прямим циліндром з цією ж основою D_i і висотою $z_i = f(x_i; y_i)$. Об'єм цього циліндра наближено дорівнює об'єму ΔV_i циліндричного стовпчика, тобто $\Delta V_i \approx f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$. Тоді отримуємо:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx f(x_1; y_1)\Delta S_1 + f(x_2; y_2)\Delta S_2 + ... + f(x_n; y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i .$$

Для підвищення точності цієї рівності будемо зменшувати розміри областей D_i збільшуючи їх число. Природно прийняти границю цієї суми за об'єм тіла V за умови, що число частинних областей D_i необмежено збільшується $(n \to \infty)$, і при цьому кожна частинна область зменшується так, що стягується в точку. В результаті маємо:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i; y_i\right) \Delta S_i \,.$$

Границя цього вигляду і є **подвійний інтеграл** від функції $f\left(x;y\right)$ по області D; він позначається символом $\iint\limits_D f\left(x;y\right)dS$ або $\iint\limits_D f\left(x;y\right)dxdy$. Отже, об'єм циліндричного тіла дорівнює:

$$V = \iint\limits_D f\left(x;y\right)dxdy \,. \qquad (1)$$

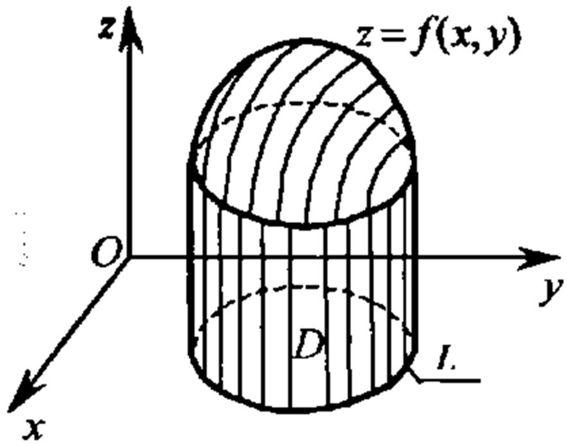
Означення. Подвійний інтеграл визначається рівністю:

$$\iint\limits_D f\left(x;y\right)dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i; y_i\right) \Delta S_i \,. \qquad (2)$$

В цьому випадку говорять, що функція $f\left(x;y\right)$ інтегрується в області D; D - область інтегрування; x, y змінні інтегрування.

Геометричний зміст подвійного інтегралу.

Якщо $f\left(x;y\right) > 0$ в області D, то подвійний інтеграл чисельно дорівнює об'єму циліндричного тіла, яке знаходиться над площиною xOy, нижня основа якого є область D, верхня – частина поверхні $z = f\left(x;y\right)$, що проектується в D, а бічна поверхня – циліндрична, з твірною, паралельно осі Oz.



Чи існує для будь-якої функції подвійний інтеграл?

Теорема. (достатня умова існування подвійного інтеграла).

Якщо функція $z = f\left(x;y\right)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, то існує подвійний інтеграл від функції $f\left(x,y\right)$ по області D.

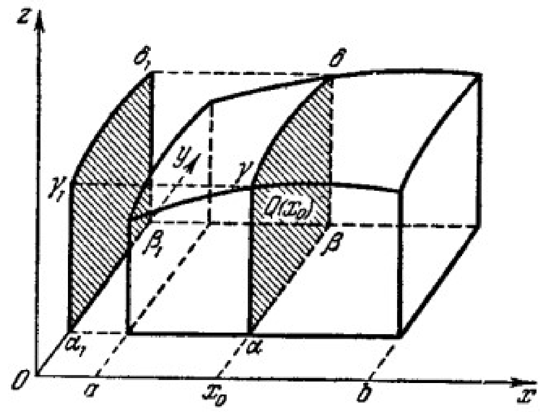
Властивості подвійного інтегралу.

1. $\iint\limits_D c\cdot f(x;y)\,dxdy = c\cdot\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy,\ c = const$

2. $\iint\limits_D \left[f_1(x;y)\pm f_2(x;y)\right]dxdy = \iint\limits_D f_1(x;y)\,dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x;y)\,dxdy$

3. Якщо область D складається із двох областей D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то:
$\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)\,dxdy$

Обчислення подвійного інтегралу.



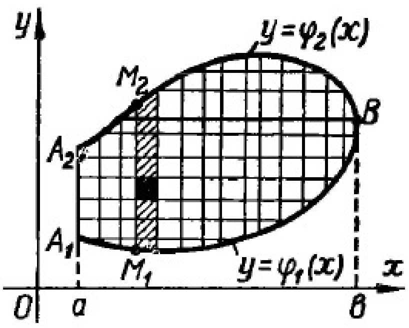
Як відомо, об'єм тіла за його поперечними перетинами можна обчислити за допомогою визначеного інтеграла. Розглянемо спочатку найпростіший випадок.

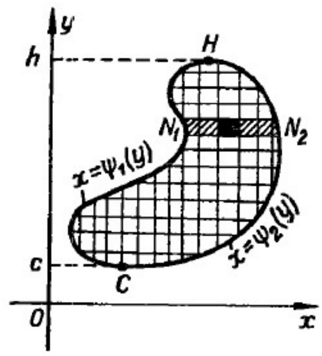
Нехай в основі циліндричного бруса лежить прямокутник зі сторонами $(b-a),(d-c)$. Тіло обмежено площинами $x=a, x=b, y=c,\ y=d$.

Припустимо, що перетин тіла площиною, перпендикулярній осі Ox і відповідній абсцисі $x\ \ (a\le x\le b)$, має площу. Тоді об'єм тіла визначається формулою: $V=\int\limits_a^b Q(x)\,dx$ (3)

Перетин бруса площиною $x=x_0\,(a\le x_0\le b)$ є криволінійна трапеція, площа якої виражається через визначений інтеграл: $Q(x_0)=\int\limits_c^d f(x_0,y)\,dy$. Тоді об'єм тіла дорівнює $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x;y)\,dy$ (4)

Аналогічний результат можна отримати і для більш загального випадку, коли область D на площині Oxy являє собою криволінійну трапецію, обмежену двома кривими $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$.





Означення. Область D називається **правильною у напрямку осі** Oy, якщо будь-яка пряма, яка проходить через внутрішню точку області D, паралельно осі Oy, перетинає кордон області в двох точках.

Аналогічно визначається правильна область в напрямку осі Ox.

Якщо область D правильна у напрямку осі Oy, то **подвійний інтеграл виражається через повторний інтеграл за формулою**:

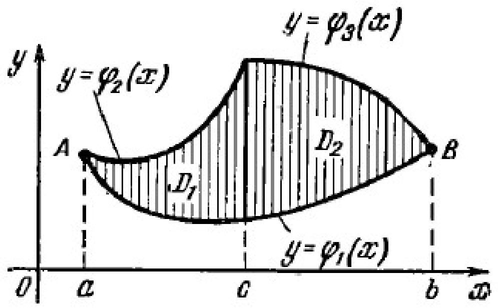
$$\iint_D f(x;y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy.$$

Різниця в порівнянні з вище розглянутим випадком полягає в наступному: раніше при будь-якому фіксованому $x=x_0$ зміна відбувалося в одному і тому ж проміжку $[c;d]$, а тепер цей проміжок $\left[\varphi_1(x_0);\varphi_2(x_0)\right]$ сам залежить від x_0.

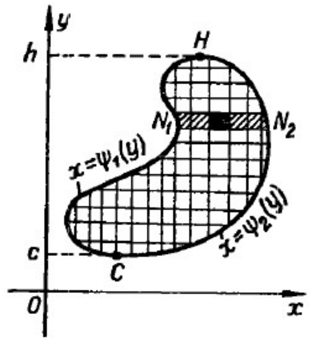
Означення. Інтеграл $\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy$ називається **повторним** або **двократним**.

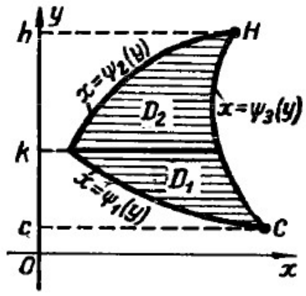
Інтеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy$ називається внутрішнім інтегралом. В ньому інтегрування ведеться по змінній y, а x вважається сталою величиною.

У тому випадку, якщо виявиться, що нижня або верхня лінія межі складається з декількох ділянок, що мають різні рівняння, то область D слід розбити прямими, паралельними осі, на частини, в кожній з яких нижня і верхня лінії межі визначалися б кожна одним рівнянням.



$$\iint_D f(x;y)\,dxdy = \int_a^c dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x;y)\,dy.$$



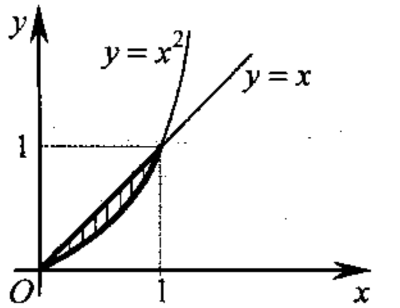


Якщо область D правильна в напрямку осі Ox, то подвійний інтеграл можна виразити за формулою:

$$\iint_D f(x;y)\,dxdy = \int_c^h dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)\,dx$$

Зауваження. Межі зовнішнього інтеграла завжди постійні. Межі внутрішнього інтеграла, як правило є змінними і залежать від тієї змінної, яка розглядається як постійна.

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, де область D обмежена лініями $x = 0$, $x = 1$, $y = x^2$, $y = x$.



$$\iint\limits_D xy^2\,dx\,dy = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_{x^2}^{x} y^2\,dy = \int\limits_0^1 x\left(\int\limits_{x^2}^{x} y^2\,dy\right)dx = \int\limits_0^1 x\left(\frac{y^3}{3}\bigg|_{x^2}^{x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x(x^3 - x^6)\,dx = \frac{x^5}{15}\bigg|_0^1 - \frac{x^8}{24}\bigg|_0^1 = \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}.$$