

### Екстремум функції двох змінних

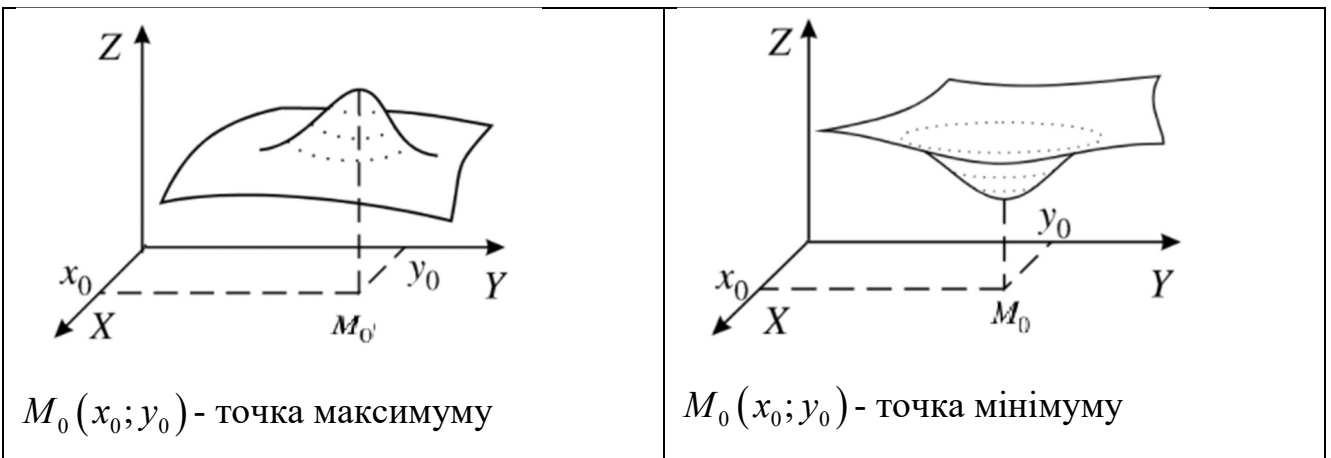
Поняття максимуму, мінімуму, екстремуму функції двох змінних аналогічні відповідним поняттям функції однієї незалежної змінної.

Нехай функція  $z = f(x; y)$  визначена в деякій області  $D$ , точка  $M_0(x_0; y_0) \in D$ .

**Означення.** Функція  $z = f(x; y)$  має **максимум** в точці  $M_0(x_0; y_0)$ , якщо існує такий  $\delta$ -окіл точки  $M_0(x_0; y_0)$ , що для кожної точки  $M(x; y)$ , що відрізняється від точки  $M_0(x_0; y_0)$ , з цього околу виконується нерівність  $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ .

**Означення.** Функція  $z = f(x; y)$  має **мінімум** в точці  $M_0(x_0; y_0)$ , якщо існує такий  $\delta$ -окіл точки  $M_0(x_0; y_0)$ , що для кожної точки  $M(x; y)$ , що відрізняється від точки  $M_0(x_0; y_0)$ , з цього околу виконується нерівність  $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ .

**Означення.** Мінімум і максимум функції називаються **екстремумами** функції. Точка  $M_0$  в якій функція має екстремум, називається **точкою екстремуму**.



**Зауваження.** Відзначимо, що, в силу означення, точка екстремуму функції лежить всередині області визначення функції; максимум і мінімум мають локальний (місцевий) характер: значення функції в точці  $M_0(x_0; y_0)$  порівнюється з її значеннями в точках, досить близьких до  $M_0(x_0; y_0)$ . В області  $D$  функція може мати кілька екстремумів або не мати жодного.

Функція, що має декілька екстремумів в області визначення.

Сформулюємо необхідну умову екстремуму.

**Теорема 1 (необхідна умова існування локального екстремуму).** Якщо диференційована функція  $z = f(x; y)$  має локальний екстремум в точці  $M_0(x_0; y_0)$ , то в цій точці частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю.

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Геометрично рівності (1) позначають, що в точці  $M_0(x_0; y_0)$  екстремуму функції  $z = f(x; y)$  дотична площина до поверхні, що зображує функцію  $z = f(x; y)$ , паралельна площині  $Oxy$ .

**Означення.** Точки, в яких частинні похідні першого порядку функції  $z = f(x; y)$  дорівнюють нулю, називаються **стаціонарними точками** функції  $z$ .

**Зауваження.** Зазвичай, функції декількох змінних мають скінченні похідні на усій області, і тоді точки екстремуму слід шукати лише серед стаціонарних точок. Але зустрічаються випадки, коли в окремих точках деякі частинні похідні мають нескінченні значення або зовсім не існують (в той час, як інші частинні похідні дорівнюють нулю). Такі точки теж треба перевіряти на екстремум.

**Означення.** Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю або не існують називаються **критичними** точками функції  $z = f(x; y)$ .

**Зауваження.** Функція може мати екстремум в точках, де одна або декілька або усі з частинних похідних не існують.

Приміром, дослідимо функцію  $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Функція  $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  має максимум у точці  $(0;0)$ , оскільки  $f(0,0) = 1, f(x, y) < 1$ , якщо  $x^2 + y^2 > 0$ .

Частинні похідні функції  $f(x, y)$

$$f'_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f'_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

у точці  $(0;0)$  не існують.

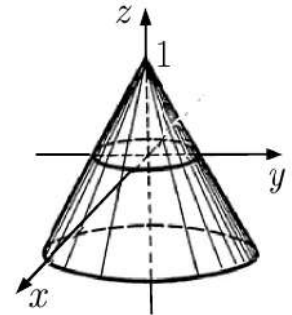
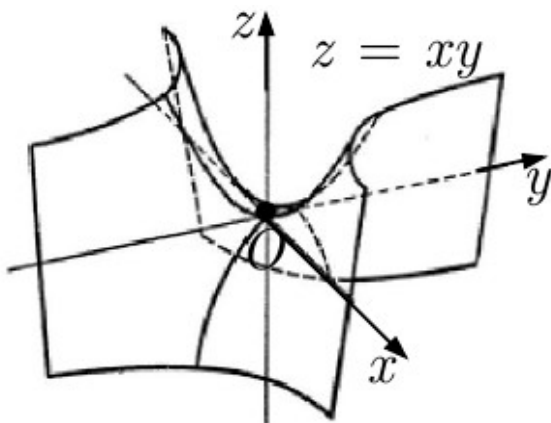


Рис. У точці  $(0;0;1)$  похідні не існують

**Зауваження.** Не всяка критична точка є точкою екстремуму, тобто теорема 1 встановлює лише необхідну, але не достатню умови екстремуму.

Приміром, дослідимо функцію  $z = xy$ . Частинні похідні функції  $z = xy$  дорівнюють нулеві в точці  $(0;0)$ . Але ця функція у вказаній точці екстремуму не має, тому що в досить малому околі точки  $(0;0)$  вона набуває як додатних, так і від'ємних значень. Графіком функції  $z = xy$  є гіперболічний параболоїд.



Точка  $O$  є сідловою точкою поверхні.

Умова  $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$  не є достатньою для дослідження

питання про екстремальні значення функції, необхідно додаткове дослідження за допомогою достатньої умови існування екстремуму.

### Теорема 2 (достатні умови екстремуму функції двох змінних).

Нехай  $M_0(x_0; y_0)$  – стаціонарна точка функції  $z = f(x; y)$ , тобто  $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$ . В деякому околі точки  $M_0(x_0; y_0)$  функція має неперервні частинні похідні другого порядку. Введемо позначення:

$A = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, C = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y^2}$  і складемо дискримінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \text{ Тоді:}$$

- якщо  $\Delta > 0$ , то функція  $z = f(x; y)$  має в точці  $M_0(x_0; y_0)$  екстремум, зокрема максимум при  $A < 0$  (або  $C < 0$ ) і мінімум при  $A > 0$  (або  $C > 0$ ).
- якщо  $\Delta < 0$ , то функція  $z = f(x; y)$  в точці  $M_0(x_0; y_0)$  екстремуму не має.
- якщо  $\Delta = 0$ , то екстремум може бути, а може не бути (необхідне додаткове дослідження).

**Приклад .** Знайти екстремуми функції  $z = x^3 + y^3 - 15xy + 2$ .

Розв'язок.

1. Знайдемо область визначення функції.

Областю визначення заданої функції є вся площина  $xOy$ .

2. Знайдемо стаціонарні точки функції.

Знаходимо частинні похідні першого порядку функції  $z$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + y^3 - 15xy + 2)'_x = 3x^2 - 15y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + y^3 - 15xy + 2)'_y = 3y^2 - 15x.$$

Прирівнюючи нулю ці похідні, отримуємо систему для визначення стаціонарних точок.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 15y = 0 \\ 3y^2 - 15x = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь маємо дві стаціонарні точки  $M_1(0;0)$  і  $M_2(5;5)$ .

3. Знайдемо частинні похідні другого порядку.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 - 15y)'_x = 6x; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 - 15y)'_y = -15,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (3y^2 - 15x)'_y = 6y.$$

4. Складемо дискримінант  $\Delta(x, y)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \quad \Delta = \begin{vmatrix} 6x & -15 \\ -15 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 225.$$

5. Дослідимо стаціонарну точку  $M_1(0;0)$ .

Обчислимо  $\Delta(M_1) = 36xy - 225 = 36 \cdot 0 \cdot 0 - 225 = -225 < 0$ . Згідно з теоремою щодо достатньої умови екстремуму, в точці  $M_1$  екстремуму немає.

6. Дослідимо стаціонарну точку  $M_2(5;5)$ .

Обчислимо  $\Delta(M_2) = 36xy - 225 = 36 \cdot 5 \cdot 5 - 225 = 675 > 0$ . Згідно з теоремою щодо достатньої умови екстремуму, точка  $M_2$  є точкою екстремуму.  $A = 6 \cdot x = 6 \cdot 5 = 30 > 0$ . Отже точка  $M_2$  є точкою мінімуму.

7. Обчислимо значення функції в точці екстремуму:

Обчислимо значення функції  $z$  у точці  $M_2$ . В результаті маємо  $z_{\min} = z(M_2) = z(5;5) = x^3 + y^3 - 15xy + 2 = 5^3 + 5^3 - 15 \cdot 5 \cdot 5 + 2 = -123$ .