Лекція 8

Диференціювання функції багатьох змінних

Означення функції багатьох змінних

Будемо розглядати функції двох змінних, так як всі найважливіші факти теорії функції декількох змінних спостерігаються вже на функціях двох змінних. Ці факти узагальнюються на випадок більшого числа змінних. Крім того, для функцій двох змінних можна дати наочну геометричну інтерпретацію.

Означення. Нехай задано множина D впорядкованих пар чисел $(x;y)$. Якщо кожній парі $(x;y)$ значень двох незалежних змінних величин x і y з деякої області їх змінення D ставиться у відповідність за деяким законом певне значення величини $z \in \mathbb{R}$, то кажуть, що z - **функція двох незалежних змінних**, що визначена в області D.

Символічно функція двох незалежних змінних позначається так:

$$z = f(x;y).$$

При цьому x і y називаються незалежними змінними (аргументами), а z - залежною змінною (функцією).

Областю визначення функції $z = f(x;y)$ називається множина точок $(x;y)$ площини xOy, у яких задана функція набуває певного дійсного значення.

Безліч значень, які приймає z в області визначення, називається областю значень цієї функції, позначається $E(f)$.

Прикладом функції двох змінних може служити площа S прямокутника зі сторонами, довжини яких дорівнюють x і y: $S = x \cdot y$. Областю визначення цієї функції є множина $\{(x;y) \ | x>0, y>0\}$.

Значення функції $z = f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0;y_0)$ або $z_0 = f(M_0)$ і називають **частинним значенням функції**.

Приклад. Знайти значення функції $z = 2x^2 + 3xy$ в точці $M_0(1;2)$

$$z_{M_0} = z(1;2) = 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\cdot 2 = 8$$

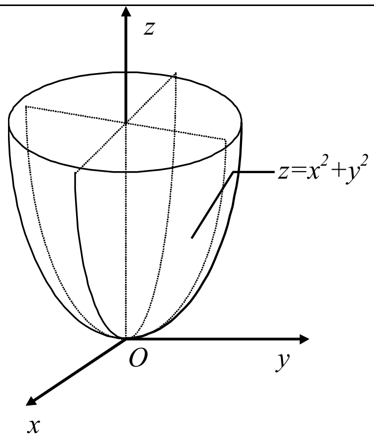
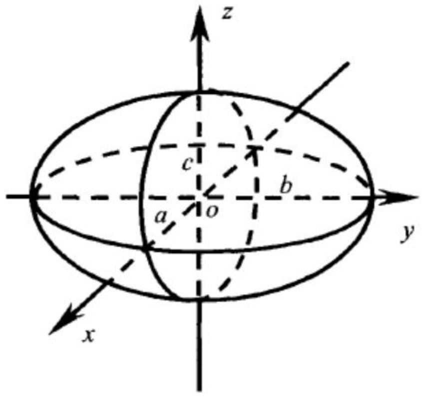
Функція двох змінних, як і функція однієї змінної, може бути задана різними способами: аналітично, таблицею, графіком.

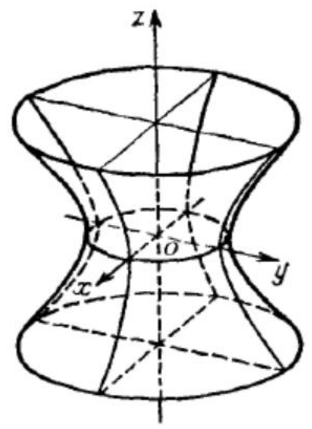
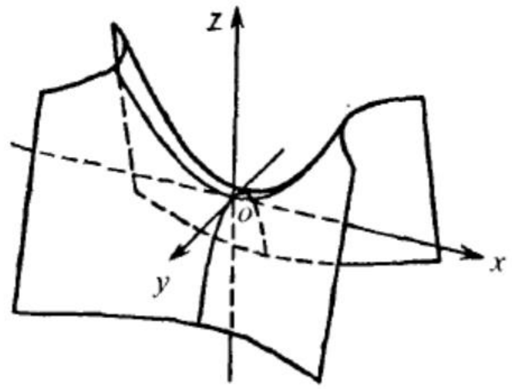
Аналогічно визначається функція будь-якого скінченного числа незалежних змінних $u = f(x;y;z;...;t)$.

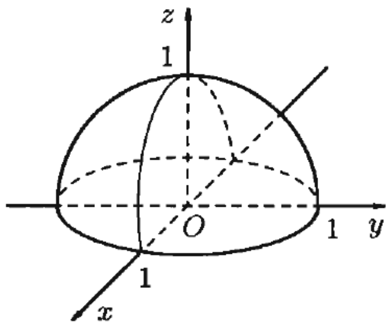
Геометричне зображення функції двох змінних

Означення. Графіком функції двох змінних називається множина точок трьохмірного простору $(x;y;z)$, апліката z яких зв'язана с абсцисою x і y ординатою функціональним співвідношенням $z = f(x;y)$

Графік функції двох змінних $z = f(x;y)$ представляє собою деяку поверхню в трьохмірному просторі.

	
Параболоїд обертання $z = x^2 + y^2$	Еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

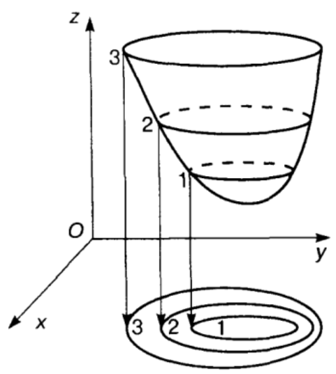
	
Гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Параболоїд гіперболічний $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad pq>0$



Наприклад, функція $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ має область визначення коло $x^2+y^2\le 1$ і зображується верхньою полусферою с центром у точці $O(0;0;0)$ і радіусом $R=1$

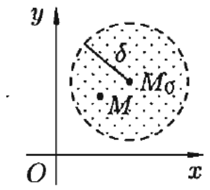
Формально графік можна визначити і для $n>2$ числа змінних. В цьому випадку він називається гіперповерхньою в $(n+1)$- мірному просторі. Про цей графік можна говорити тільки абстрактно – зобразити його на рисунку не є можливим.

Означення. Лінією рівня функції $z=f(x;y)$ називається лінія на площині XOY, в кожній точці якої функція приймає одне й теж значення. Рівняння лінії рівня $f(x;y)=c$, де c- стала.



Границя функції двох змінних

Означення. Множина усіх точок $M(x;y)$ площини, координати яких задовольняють нерівності $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, називається δ - окілом точки $M_0(x_0;y_0)$.



Іншими словами δ - окіл точки $M_0(x_0;y_0)$ - це усі внутрішні точки круга с центром $M_0(x_0;y_0)$ і радіусом δ.

Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$, окрім, бути може, самої точки.

Означення. Число A називається **границею функції** $z=f(x;y)$ при $x\to x_0$ і $y\to y_0$ (або, що теж саме, при $M(x;y)\to M_0(x_0;y_0)$), якщо для любого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що для усіх $x\neq x_0$, $y\neq y_0$, що задовольняють нерівності $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ виконується нерівність $|f(x;y)-A|<\varepsilon$. Записують:

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) \quad \text{або} \quad A=\lim_{M\to M_0} f(M).$$

Частинні похідні функції двох змінних

Означення. ***Частинною похідною за змінною*** x функції $z=f(x;y)$ називається границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$, якщо вона існує.¶

Частинна похідна за змінною x функції $z=f(x;y)$ позначається одним з символів¶

$$z'_x,\ f'_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}.¶$$

Таким чином, за означенням, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$.¶

Означення. ***Частинна похідна за змінною*** y функції $z=f(x;y)$ визначається як границя $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$

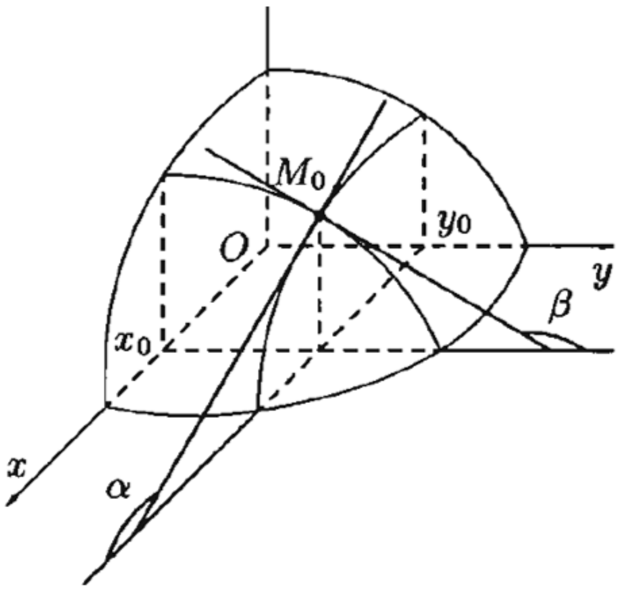
Частинна похідна за y функції $z = f(x;y)$ позначається одним з символів

$$z'_y,\ \ f'_y(x,y),\ \ \frac{\partial z}{\partial y},\ \ \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Таким чином, за означенням, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$.

Таким чином, частинна похідна функції кількох (двох, трьох і більше) змінних визначається як похідна функції однієї з цих змінних за умови сталості значень інших незалежних змінних.

Геометричний зміст частинних похідних



Графіком функції $z = f(x;y)$ є деяка поверхня. Графіком функції $z = f(x;y)$ є деяка поверхня. Графік функції $z = f(x;y_0)$ є лінія перетину цієї поверхні з площиною $y = y_0$. Виходячи з геометричного змісту похідної для функції однієї змінної, робимо висновок, що $f'_x(x_0;y_0) = tg\alpha$, де α кут між віссю Ox (додатний напрямок) і дотичною, що проведена до кривої $z = f(x;y_0)$ в точці $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$. Аналогічно, $f'_y(x_0;y) = tg\beta$

Помітивши, що $\Delta_x z$ обчислюється при фіксованому y, а $\Delta_y z$ – при фіксованому x, визначення частинних похідних можна сформулювати наступним чином:

Означення. ***Частинною похідною за змінною x*** функції $z = f\left(x;y\right)$ називається похідна за x, обчислена за припущенням, що y – стала.

Означення. ***Частинною похідною за*** y функції $z = f\left(x;y\right)$ називається похідна за y, обчислена за припущенням, що x – стала.

Останні означення дозволяють застосовувати для обчислення частинних похідних правила знаходження похідної для функції однієї змінної.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 3x + 5y + 6xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x + 5y + 6xy\right)'_x = \left|y \text{ const}\right| = 3\cdot 1 + 0 + 6y\cdot 1 = 3 + 6y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3x + 5y + 6xy\right)'_y = \left|x \text{ const}\right| = 0 + 5\cdot 1 + 6x\cdot 1 = 5 + 6x$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $z = 2xy + y^3$ в т. $M_0\left(2;1\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2xy + y^3\right)'_x = 2y\cdot 1 + 0 = 2y \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0(2;1)} = 2\cdot 1 = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2xy + y^3\right)'_y = 2x\cdot 1 + 3y^2 \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0(2;1)} = 4 + 3 = 7$$

Зауваження. Частинні похідні функції будь-якого числа змінних визначаються аналогічно.

Повний диференціал функції багатьох змінних

Повним диференціалом функції $z = f\left(x;y\right)$ в точці M_0 називається головна частина повного приросту функції $z = f\left(x;y\right)$, лінійна відносно приростів аргументів. Повний диференціал обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Для функції n змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ маємо формулу

$$\boxed{du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.}$$

Приклад. Знайти область визначення, частинні похідні і диференціал першого порядку функції $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$.

Розв'язування прикладу

1) Область визначення – множина усіх точок площини xOy;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^3 + 5xy^2 - y^3 \right)'_x = |y = \text{const}| = 3x^2 + 5y^2,$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^3 + 5xy^2 - y^3 \right)'_y = |x = \text{const}| = 10xy - 3y^2;$

3) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (3x^2 + 5y^2) \cdot dx + (10xy - 3y^2) \cdot dy;$