Невласні інтеграли

Невласні інтеграли поділяються на невласні інтеграли I і II роду.

Означення. ***Невласними інтегралами I роду*** називають визначені інтеграли з нескінченними межами інтегрування.

Приклади: $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; $\int\limits_{-\infty}^{0} \cos x dx$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Обчислення невласного інтеграла здійснюється за допомогою граничного переходу:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f\left(x\right)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f\left(x\right)dx \qquad (1)$$

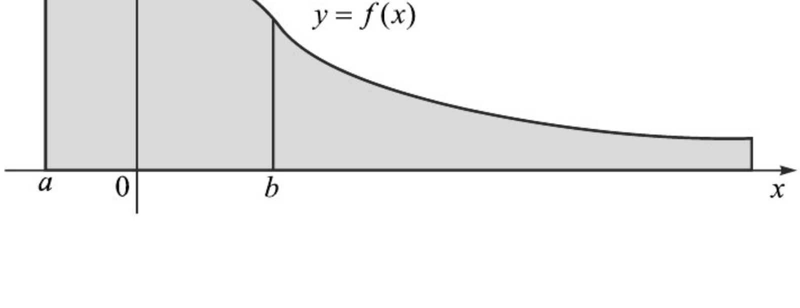
У випадку, коли ця границя є число скінченне, то інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f\left(x\right)dx$ називається **збіжним**, а підінтегральна функція $f(x)$ інтегрованою на проміжку $\left[a;+\infty\right)$. А якщо ця границя є нескінченна або не існує, то інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f\left(x\right)dx$ називається **розбіжним**, а функція $f(x)$ неінтегрованою на проміжку $\left[a;+\infty\right)$.

Аналогічно можна дати означення невласного інтеграла на проміжку $\left(-\infty;b\right]$.

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f\left(x\right)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f\left(x\right)dx \qquad (2).$$

Геометричний зміст невласного інтегралу I роду.

Якщо функція $f(x)$ є неперервною і невід'ємною на проміжку $\left[a;+\infty\right)$, а інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f\left(x\right)dx$ збігається, то він дорівнює площі необмеженої області.



Можна казати, що невизначений інтеграл дорівнює площині нескінченно довгої трапеції.

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$ та інтегрована на будь-якому відрізку $[a;b]$, де a і b – довільні дійсні числа, то можна визначити невласний інтеграл з двома нескінченними межами, припустивши

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx,$$

де c – довільне дійсне число.

Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx$ збігається тоді і тільки тоді, коли обидва інтеграли $\int_{-\infty}^{c} f\left(x\right)dx$ і $\int_{c}^{+\infty} f\left(x\right)dx$ збігаються. При цьому інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx$ не залежить від вибору числа c.

Обчисліть невласні інтеграли або встановити їх збіжність:

Приклад 1. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} x^{-2}dx = -\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{1}{x}\right|_{1}^{b} = -\left(0-1\right) = 1.$

Інтеграл збігається.

Приклад 2. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\ln b - \ln 1 = \lim_{b\to\infty}\ln b - 0 = \infty$. Інтеграл розбігається.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+10}$

Розв'язання.

Спочатку виділимо в знаменнику підінтегральної функції повний квадрат і розіб'ємо інтеграл на суму двох інтегралів, тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+10} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{(x+3)^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{(x+3)^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(x+3)\,\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}(x+3)\,\Big|_{0}^{b} =$$

$$= \operatorname{arctg}3 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}3 = \pi,$$

оскільки $\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}a = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ і $\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

Для розв'язання питання про збіжність невласного інтегралу використовуються наступні ознаки збіжності.

Теорема 1. (ознака порівняння). Нехай при $a \le x < +\infty$ виконується умова:

$$0 \le f(x) \le g(x).$$

Тоді: якщо $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$;

якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається, то розбігається і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Приклад 4. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}$.

Розв'язок. При $x \ge 1$ маємо $\frac{1}{x^2\left(1+3^x\right)} < \frac{1}{x^2}$. Але інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ збігається (дивись приклад 1).

Отже, інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}$ також збігається і його значення менше 1.

Теорема 2. (гранична ознака порівняння). Нехай при $a \le x < +\infty$ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ і існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, тоді інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад 5. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$.

Розв'язок. Інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ збігається (дивись приклад 1).

Обчислимо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1$.

Маємо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 > 0$ тому інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Отже, інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$ збігається.

Примітка. Введені ознаки збіжності виконуються за умови, що підінтегральні функції невід’ємні (додатні).
У випадку знакозмінної підінтегральної функції має місце така ознака збіжності.
Теорема 3. (достатня ознака збіжності невласного інтеграла від знакозмінної функції). Якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$, то збігається і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Означення. Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$.

Означення. Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називається умовно збіжним, якщо він збігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$ розбігається.

Практичні рекомендації:

1. При використанні ознак порівняння для вияснення питання про збіжність за інтеграл, з яким здійснюється порівняння, береться інтеграл вигляду $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $p \in \mathbb{R}$, для якого має місце твердження:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \begin{cases} \text{збігається, якщо } p > 1 \\ \text{розбігається, якщо } p \le 1 \end{cases}.$$

Такі ж властивості має інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $a > 0$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграли:

Інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається ($p > 1$).

Інтеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^5}$ збігається ($p > 1$).

Інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ розбігається ($p = \frac{1}{2} < 1$).

Інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ розбігається ($p = \frac{1}{3} < 1$).

2. Якщо підінтегральна функція в інтегралі $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ має вигляд $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m<n)$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ - раціональні або ірраціональні многочлени, то для дослідження невласний інтеграл I-го роду порівнюють з еталонним інтегралом $\int_{1}^{\infty}\dfrac{dx}{x^{n-m}}$.

3. Якщо підінтегральна функція $f(x)$ – містить трансцендентні функції, то використовуються методи порівняння. При цьому важливо пам'ятати такі оцінки:

$$|\sin x|\le 1,\ |\cos x|\le 1,\ |\operatorname{arctg} x|<\frac{\pi}{2};\ \ln x<x^{a}\,(a>0)\ \text{при}\ x\to\infty .$$

Приклад.

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2+\sqrt{x}}dx .$$

Розв'язання.

Функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+\sqrt{x}}$ змінює знак разом із зміною знака чисельника. Дослідимо збіжність інтеграла $\int_{1}^{\infty}\dfrac{|\sin x|}{x^2+\sqrt{x}}dx$. Оскільки $0<\dfrac{|\sin x|}{x^2+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{x^2}$, а інтеграл $\int_{1}^{\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ є збіжним, то за ознакою порівняння (теорема 1) інтеграл $\int_{1}^{\infty}\dfrac{\sin x}{x^2+\sqrt{x}}dx$ збігається абсолютно.

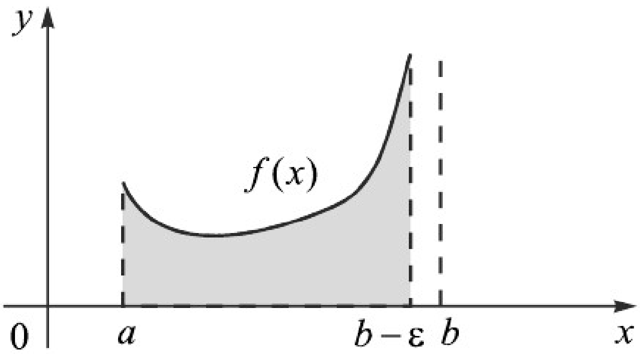
Невласні інтеграли другого роду (інтеграли від необмежених функцій)

Означення. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b)$ і має нескінченний розрив при $x=b$ (в точці $x=b$ функція необмежена). Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то її називають ***невласним інтегралом другого роду*** (інтегралом від необмеженої функції) і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таким чином, за означенням

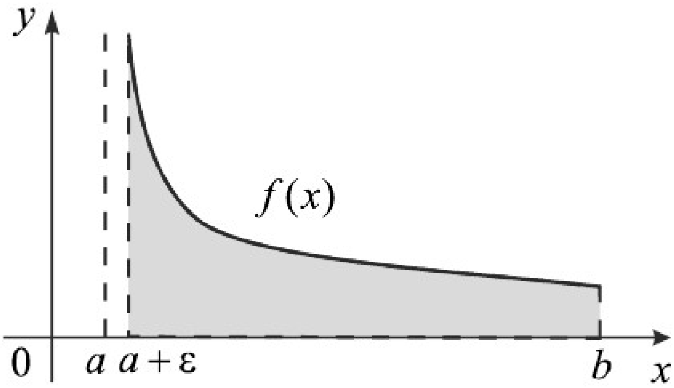
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Якщо границя в правій частині існує, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ **збігається**. Якщо вказана границя не існує або нескінченна, то говорять, що інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ **розбігається**.



Аналогічно, якщо функція має нескінченний розрив в точці $x=a$, то вважають

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx .$$

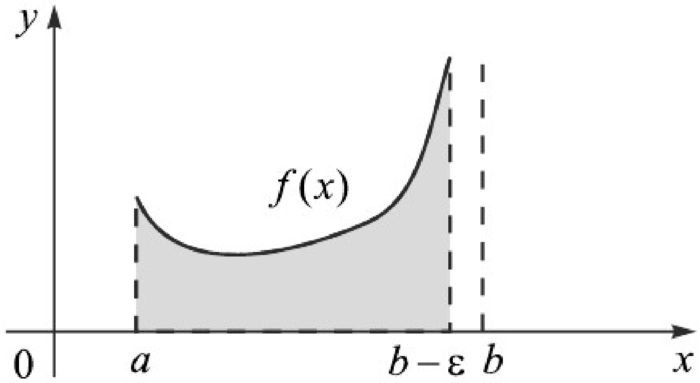


Якщо функція $f(x)$ має розрив у внутрішній точці c відрізка $[a;b]$, то невласний інтеграл другого роду визначається формулою

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Цій невласний інтеграл вважається збіжним, якщо збігаються обидва невласних інтеграла.

Геометричний зміст невласного інтегралу другого роду. У випадку, коли $f(x) > 0$, невласний інтеграл другого роду $\int_a^b f(x)dx$ (розрив в точці $x = b$) можна трактувати як площину нескінченно високої криволінійної трапеції.



Приклад. Обчислити $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Розв'язок. При $x = 0$ функція $y = \frac{1}{x^2}$ має нескінчений розрив.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}dx = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1 - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty .$$

Інтеграл розбігається.

Ознаки збіжності для невласних інтегралів другого роду співпадають з ознаками збіжності невласних інтегралів першого роду.